Aziz El Kacimi Alaoui

Variable complexe et surfaces riemanniennes

Cours et exercices résolus

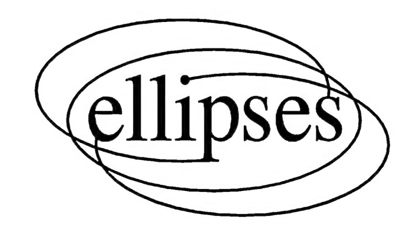


Références sciences

Variable complexe et surfaces riemanniennes

Cours et exercices résolus

Aziz El Kacimi Alaoui



AVANT-PROPOS

Par l'apport de ses outils performants, la théorie des fonctions d'une variable complexe a contribué à la compréhension de la géométrie différentielle et la topologie des surfaces. C'est la raison qui a motivé mon choix de mettre ces deux thèmes dans un texte commun. Celui-ci se compose de deux parties ayant constitué les contenus de cours que j'ai dispensés en Licence et en Master à l'Université Polytechnique Hauts-de-France.

La première partie introduit l'analyse complexe en dimension un. Ce qui suppose bien entendu une connaissance maîtrisée des nombres complexes. On en expose l'essentiel au chapitre I. On construit le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ et on liste ce qu'on peut en dire d'important. On définit ses objets géométriques comme le module, l'argument, et on donne l'interprétation des opérations algébriques en termes de transformations : l'addition et la multiplication correspondent respectivement à translater et à appliquer une similitude directe.

La notion de série entière est fondamentale dans cette partie. On l'introduit dans le chapitre II avec les objets qui lui sont rattachés (en premier lieu son rayon de convergence) et quelques-unes de ses propriétés essentielles : l'analyticité de la fonction qu'elle définit, l'unicité du prolongement analytique de celle-ci (quand elle en admet) et ses zéros qui sont toujours isolés.

Les fonctions holomorphes apparaissent au chapitre III. Leur définition principale en est donnée : celle de l'existence de la dérivée au sens complexe. Géométriquement, cette propriété force la différentielle réelle, a priori $\mathbb{R}$-linéaire, à être en fait $\mathbb{C}$-linéaire, ce qui amène les conditions de Cauchy-Riemann qui sont un critère pratique d'holomorphie. On définit l'intégrale d'une fonction complexe f sur un chemin, en insistant sur ses propriétés bien particulières lorsque f est holomorphe.

S'ensuivent, au chapitre IV, la formule intégrale de Cauchy et ce qu'elle permet d'établir, par exemple l'analyticité d'une fonction holomorphe et le développement de Laurent (au chapitre VI).

Au chapitre V on étudie les homographies (sous l'aspect analytique et géométrique) de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Le groupe des homographies y est décrit et mis en lien avec le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. On y détermine aussi explicitement le groupe des biholomorphismes du disque unité ouvert et celui du demi-plan supérieur.

Le chapitre VI est consacré aux singularités d'une fonction holomorphe : apparente, pôle ou singularité essentielle. Ce qui amène de façon naturelle à la notion de fonction méromorphe, ensuite au théorème des résidus et ses fameuses applications au calcul effectif des intégrales de fonctions d'une variable réelle. On termine par le principe de l'argument et le théorème de Rouché.

Des exercices résolus sont proposés à la fin de chaque chapitre. Certains d'entre eux sont longs mais traitent souvent d'une notion apportant un complément au cours.

Plus réduite, la deuxième partie est consacrée à une introduction élémentaire aux surfaces riemanniennes avec un peu d'insistance sur le cas hyperbolique. Dans beaucoup d'endroits, l'utilisation des outils développés dans la première partie s'est avérée pertinente.

Dans le chapitre VII, on introduit la notion de surface différentiable à l'aide des cartes locales. Celles-ci permettent de transposer ce qu'on sait faire sur les ouverts du plan pour définir l'espace tangent, les champs de vecteurs, les formes différentielles... L'orientabilité d'une surface assure l'existence des formes volume qui donnent des mesures régulières similaires à la mesure de Lebesgue sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Les actions libres et propres de groupes discrets offrent un bon moyen pour fabriquer des surfaces.

Les métriques riemanniennes et les objets géométriques associés (par exemple la longueur d'une courbe) sont définis dans le chapitre VIII. Suivent, dans le chapitre IX, les connexions affines, les connexions riemanniennes et le théorème de Levi-Civita. On calcule en détail la courbure sectionnelle des trois surfaces $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{H}$ (munies de leurs métriques respectives habituelles) et on détermine explicitement les géodésiques des deux premières. On clôt le chapitre par l'énoncé du théorème de classification des surfaces simplement connexes à courbure constante.

Le dernier chapitre est dédié à l'étude spécifique du demi-plan $\mathbb{H}$, ses géodésiques, son groupe d'isométries et à l'énoncé du théorème de Poincaré.

Contrairement à la première partie on n'a proposé que des exercices en vrac, sans solutions, laissant ainsi le soin au lecteur de réfléchir dessus et de les résoudre lui-même.

Une « troisième partie » de cet ouvrage consiste en cinq compléments. Ils sont peu développés et ne sont là que pour donner une idée de certaines notions utilisées dans les deux premières.

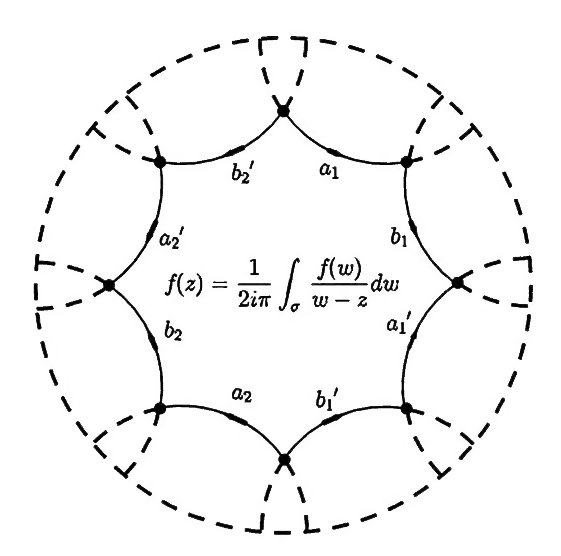
Dans Complément 1, on donne deux démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre : une par le théorème de Liouville et l'autre utilisant des outils élémentaires de topologie algébrique.

Complément 2 est un regard furtif sur des ouverts du plan complexe, des simplement connexes à quelques autres : les couronnes par exemple.

Complément 3 est une introduction au groupe fondamental et aux revêtements. On donne le calcul explicite du groupe fondamental d'un espace d'orbites (obtenu par une action libre et propre d'un groupe discret). On explique l'énoncé et la signification du théorème de Van Kampen et on l'applique sur quelques exemples.

Complément 4 est constitué de quelques éléments de la théorie des groupes pour éclairer la lecture de certains passages dans les deux parties principales. On y introduit la notion de section, celle d'extension, de produit semi-direct, les groupes résolubles et les groupes nilpotents. On montre aussi comment est bâti un groupe dénombrable par générateurs et relations ainsi que la définition de la somme amalgamée (celle-ci intervient de façon déterminante dans le théorème de Van Kampen).

Complément 5 est un exposé rapide sur la notion de courbe elliptique : sa définition à partir d'un réseau de $\mathbb{C}$, sa structure complexe et la variation de celle-ci en fonction du réseau. On y définit les fonctions elliptiques et on indique comment la fonction de Weierstrass (la plus célèbre d'entre elles) permet de plonger une courbe elliptique en courbe algébrique dans le plan projectif $P^2(\mathbb{C})$.



Un octogone fondamental qui donne
une surface hyperbolique de genre 2.
La formule de Cauchy, un ingrédient
au cœur de l'analyse complexe.

TABLE DES MATIÈRES

VARIABLE COMPLEXE

SURFACES RIEMANNIENNES

VARIABLE COMPLEXE

CHAPITRE I
NOMBRES COMPLEXES

1. L'aspect algébrique

La hiérarchie numérique débute par les nombres entiers naturels qui comptent les éléments des ensembles finis. Leur ensemble, noté $\mathbb{N}$, est muni d'une addition $m+n$ et d'une multiplication mn. Le besoin de résoudre les équations du type $x+m=n$ et $mx=n$ a amené à l'élargir et à introduire l'anneau des entiers relatifs $(\mathbb{Z},+,\times)$ et le corps des nombres rationnels $(\mathbb{Q},+,\times)$. Les nombres réels sont arrivés pour des besoins géométriques ou autres (on pourrait à cet effet évoquer simplement le nombre $\sqrt{2}$ à partir du théorème de Pythagore). Ces derniers forment un corps $(\mathbb{R},+,\times)$ possédant beaucoup de propriétés intéressantes, entre autres la *complétude*, fondamentale en analyse : toute suite de Cauchy y converge.

Malgré toutes les belles propriétés du corps $(\mathbb{R},+,\times)$, un problème se pose : on ne peut pas y résoudre l'équation $x^2+1=0$. Il est donc nécessaire de l'agrandir en le plongeant dans un corps commutatif $\mathcal{K}$ (le plus petit) dans lequel cela sera possible. C'est l'objet de cette section.

1.1. Construction de $\mathcal{K}$

• Supposons $\mathcal{K}$ construit et qu'on y a trouvé un élément i (*imaginaire*, c'est pour cela qu'on le note ainsi) tel que $i^2=-1$; $\mathcal{K}$ devrait alors contenir tous les produits $iy=yi$ avec $y\in\mathbb{R}$ et par suite les éléments de la forme $x+iy$ où $x,y\in\mathbb{R}$. En plus, le produit $(x+iy)(x'+iy')$, calculé en utilisant les règles habituelles (commutativité, associativité, distributivité), doit aussi rester de cette forme ; et c'est le cas puisque :

$$\begin{aligned}(x+iy)(x'+iy') &= x(x'+iy')+(iy)(x'+iy')\\ &= xx'+xiy'+iyx'+iyiy'\\ &= (xx'-yy')+i(xy'+x'y).\end{aligned}$$

Cela nous suggère $\mathbb{R}^2$ comme ensemble sous-jacent à $\mathcal{K}$ ainsi que les opérations d'addition et de multiplication à mettre dessus :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \quad \text{et} \quad (x,y)(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y). \tag{I.1}$$

Il est bien connu que $(\mathbb{R}^2,+)$ est un groupe commutatif ; son élément neutre est $(0,0)$ et le symétrique de (x,y) étant son opposé $(-x,-y)$. Des calculs faciles à mener montrent que la multiplication qu'on vient de définir est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et qu'elle a $(1,0)$ comme élément neutre. Montrons que tout élément non nul (x,y) a un inverse (x',y') ; on doit avoir $(x,y)(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)=(1,0)$, ce qui nous amène au système linéaire (où les inconnues sont les nombres réels x' et y') :

$$\begin{cases} xx'-yy'=1\\ yx'+xy'=0.\end{cases}$$

La résolution de ce système donne $(x', y') = (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Tout élément $(x, y) \neq (0, 0)$ est donc inversible. L'ensemble $\mathcal{K} = \mathbb{R}^2$ muni des opérations d'addition et de multiplication définies en (I.1) est donc un corps commutatif.

• Nous allons plonger le corps des réels $\mathbb{R}$ dans le corps $\mathcal{K}$ qu'on vient de construire. À cet effet, on considère l'application $j : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{K}$ définie par $j(x) = (x, 0)$. Il est évident que j est injective et vérifie, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$:

$$j(x + x') = j(x) + j(x') \quad \text{et} \quad j(xx') = j(x)j(x')$$

autrement dit, j est un homomorphisme de corps, injetif ; on peut alors voir $\mathbb{R}$ comme un *sous-corps* de $\mathcal{K}$. Le nombre réel x sera identifié à l'élément $(x, 0)$; on écrira donc $(x, 0) = x$ tout simplement. Il est aussi facile de voir que $(0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$; l'élément $(0, 1)$, qui n'est pas réel mais dont le carré vaut le réel -1 sera noté i. Ainsi tout élément $z = (x, y)$ de $\mathcal{K}$ s'écrira sous la forme :

$$z = x + iy \quad \text{avec} \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{I.2}$$

Cette représentation est unique. En effet si $z = x + iy = x' + iy'$, on a $x - x' = i(y' - y)$; donc $(x - x')^2 = -(y' - y)^2$, ce qui n'est possible que si $x = x'$ et $y = y'$.

Le nombre réel x est appelé *partie réelle* de z qui est notée $\Re(z)$; y est sa *partie imaginaire* et est notée $\Im(z)$. Un nombre complexe de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$ est dit *imaginaire pur*.

• $\mathcal{K}$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{R}$ et dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet une solution. On le note $\mathbb{C}$ et on l'appelle le corps des *nombres complexes*.

1.2. Quelques propriétés et définitions

• L'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même qui à tout $z = x + iy$ associe le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelée *conjugaison* ; on dira que $\overline{z}$ est le *conjugué* de z. Cette application est une involution *i.e.* $\overline{(\overline{z})} = z$; et c'est un automorphisme du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, c'est-à-dire qu'on a :

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}. \tag{I.3}$$

On en déduit alors (pour $z' \neq 0$) $\overline{z} = \overline{z' \cdot \left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z'} \cdot \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$ et donc $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; autrement dit, le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. Alors $\overline{z} = z$ si, et seulement si, z est réduit à sa partie réelle x.

• Un nombre complexe z est connu dès qu'on a sa partie réelle x et sa partie imaginaire y. Inversement, on peut donner x et y en fonction de z et $\overline{z}$. En effet, on a le système :

$$\begin{cases} x + iy = z \\ x - iy = \overline{z}. \end{cases}$$

Sa résolution immédiate donne :

$$\text{(I.4)} \qquad \begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i}. \end{cases}$$

• Tel qu'on a construit $\mathbb{C}$, c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 (par exemple $\{1, i\}$ en est une base ; c'est la plus utilisée). Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes. On a :

$$z\overline{z'} = (xx' + yy') - i(xy' - yx').$$

La partie réelle de ce nombre définit une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\langle z, z'\rangle = xx' + yy'$; comme $\langle z, z\rangle = z\bar{z} = x^2 + y^2 > 0$ pour tout z non nul, cette forme est définie positive, c'est donc un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Il donne alors lieu à une norme :

$$\text{(I.5)} \qquad |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le nombre réel positif ou nul $|z|$ est appelé *module* du nombre complexe $z = x + iy$. Les principales propriétés du module sont :

$$\text{(I.6)} \qquad |zz'| = |z| \cdot |z'|, \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad \text{et} \qquad \big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Évidemment, lorsque z est réel, son module n'est rien d'autre que sa valeur absolue $|z|$ qu'on connaît habituellement. On a en particulier $|1| = 1$ et $|i| = 1$. Comme en plus $\langle 1, i\rangle = 0$, la base $\{1, i\}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est en fait orthonormée.

2. L'aspect géométrique

Nous avons vu la représentation algébrique des nombres complexes $z = x + iy$ qui fait de $\mathbb{C}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. Il y a donc une identification canonique entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ par l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x + iy = z \in \mathbb{C}$.

Deux groupes sont en jeu : le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ et le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$. Nous allons les interpréter géométriquement.

2.1. Le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. La transformation $\tau_z : u \in \mathbb{C} \longmapsto u + z \in \mathbb{C}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes $\tau_z(\alpha, \beta) = (\alpha + x, \beta + y)$; elle correspond à la translation par le vecteur $z = (x, y)$. Nous avons donc une application :

$$\tau : z \in \mathbb{C} \longmapsto \tau_z \in \mathcal{T}$$

où $\mathcal{T}$ est le groupe des translations du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Un calcul assez facile montre que τ est une bijection vérifiant $\tau_{z+z'} = \tau_{z'} \circ \tau_z$, autrement dit, τ est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathcal{T}, \circ)$ où $\circ$ est la composition des applications.

2.2. Le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}, \times)$ ou $(\mathbb{C}, \cdot)$

• Nous avons vu que la partie réelle de l'application $(z, z') \longmapsto z\overline{z'}$ définit un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ par $\langle z, z' \rangle = xx' + yy'$. On peut donc parler de *similitude linéaire directe* (« directe » signifie qu'elle préserve l'orientation donnée par exemple par la base $(1, i)$). La matrice Z d'une telle application par rapport à la base orthonormée $(1, i)$ a la forme :

$$Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \tag{I.7}$$

où x et y sont des nombres réels non simultanément nuls. Si :

$$Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z' = \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$$

sont deux matrices de ce type, leur produit (calcul facile à mener) est encore de ce type :

$$Z \cdot Z' = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + x'y) \\ xy' + x'y & xx' - yy' \end{pmatrix}. \tag{I.8}$$

Bien évidemment, la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en fait partie ainsi que l'inverse de $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ qui est :

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices de la forme (I.7) avec $x^2 + y^2 \neq 0$ muni de la multiplication habituelle est un groupe commutatif (facile à voir sur le produit (I.8)). Il est isomorphe au groupe $(\mathrm{Sim}_0^+(\mathbb{C}), \circ)$ des similitudes linéaires directes de l'espace euclidien $(\mathbb{C}, \langle\ ,\ \rangle)$.

Comme en plus l'ensemble $\mathcal{H}$ de toutes les matrices de la forme (I.7) (sans imposer cette fois-ci la condition $x^2+y^2 \neq 0$) est un groupe pour l'addition habituelle (des matrices), $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ est en fait un corps commutatif canoniquement isomorphe au corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ via l'application :

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \overset{\simeq}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{H}. \tag{I.9}$$

En conclusion, le groupe $(\mathbb{C}, +)$ est isomorphe au groupe des translations $(\mathcal{T}, \circ)$: quand on rajoute un nombre complexe $z = x+iy$ à $u = \alpha + i\beta$, on translate le point (α, β) par (x, y).

Le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathcal{H}^*, \cdot)$ (où $\mathcal{H}^*$ est l'ensemble des matrices non nulles de la forme (I.7)) : multiplier $w = a + ib$ par $z = x + iy$ revient à appliquer à (a, b) la matrice $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

• Nous venons donc d'identifier un nombre complexe non nul $z = x + iy$ à la matrice $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Mais cette dernière peut s'écrire sous la forme :

$$Z = \sqrt{x^2+y^2}\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

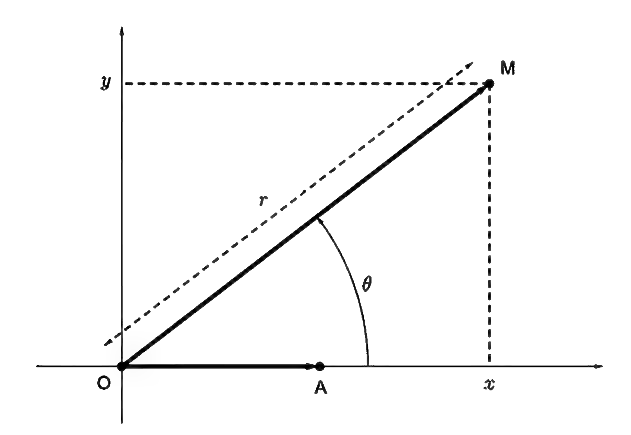
C'est la matrice de la similitude centrée à l'origine de rapport $r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ et d'angle θ tel que $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. On a donc :

$$Z = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le nombre complexe correspondant s'écrit alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. L'angle θ (défini à un multiple entier de 2π près) est appelé *argument* de z et se note $\mathrm{Arg}(z)$. Le nombre compexe non nul z est donc entièrement déterminé par son module r et son argument θ; on l'écrit $z = [r, \theta]$. Un calcul immédiat montre que $zz' = [r,\theta]\cdot[r',\theta'] = [rr', \theta+\theta']$. L'application $\Phi : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longmapsto [r,\theta] = z \in \mathbb{C}^*$ est donc un homomorphisme de groupes ; il est surjectif mais pas injectif, son noyau est $\{1\} \times 2\pi\mathbb{Z}$. Comme le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ n'est rien d'autre que le groupe $\mathrm{SO}(2)$ des rotations de centre l'origine (c'est aussi le *groupe des angles* de sommet l'origine), Φ induit un isomorphisme de groupes :

(I.10) $$\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{SO}(2) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}^*.$$

• La similitude Z appliquée au point $A = 1 = (1,0)$ donne le point $M = x + iy$ tel que $OM = r$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ (modulo 2π) (voir le dessin ci-dessous).



3. Propriétés et calculs

On connaît très bien les règles de calcul sur les nombres réels. Elles sont un peu plus riches sur le corps des complexes car, en plus de leur aspect algébrique, elles y mêlent de la géométrie, principalement par l'usage qu'elles font des rotations.

3.1. Formule de Moivre

On vient de voir qu'un nombre complexe non nul $z = x+iy$ s'écrit aussi sous la forme trigonométrique :

(I.11) $$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est son module et θ son argument. On a aussi vu qu'on utilise l'écriture $z = [r, \theta]$ et que :

$$[r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$$

pour tout $z = x + iy$ et tout $z' = x' + iy'$ (tous deux non nuls). Comme $1 = [1, 0]$, cette formule implique :

$$\frac{z}{z'} = \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right].$$

On a donc, pour tout entier relatif n : $z^n = [r^n, n\theta]$. Mise sous forme trigonométrique, cette égalité s'écrit, pour $r = 1$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{I.12}$$

C'est la *formule de Moivre.*

On verra dans le chapitre sur les séries entières comment on définit l'exponentielle d'un nombre complexe qui permet d'écrire la formule de Moivre sous la forme :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{et donc} \qquad e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Nous commencerons d'ores et déjà à l'utiliser car elle simplifie certains calculs et permet d'aller plus vite.

3.2. Racine d'un nombre complexe

• On sait que le corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ a été fabriqué afin de répondre au besoin de la résolution de l'équation du second degré $z^2 + 1 = 0$; celle-ci a deux solutions $z_0 = i$ et $z_1 = -i$. *Qu'en est-il de l'équation $z^n = a$ où a est un nombre complexe non nul quelconque et n un entier tel que $n \geq 2$?* Posons $z = [r, \theta]$ et $a = [\rho, \alpha]$. L'équation devient alors $[r^n, n\theta] = [\rho, \alpha]$; ce qui est équivalent au système :

$$r^n = \rho \quad \text{et} \quad n\theta = \alpha + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

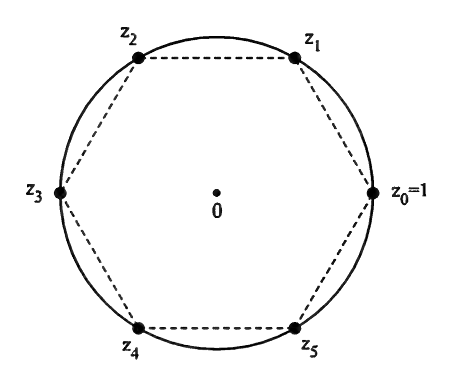
dont la résolution donne :

$$r = \rho^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n}2\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'équation $z^n = a$ a donc les n solutions listées ci-dessous :

$$z_0 = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\alpha}{n}\right], \quad z_1 = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\alpha + 2\pi}{n}\right], \cdots\cdots, z_{n-1} = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\alpha + (n-1)2\pi}{n}\right].$$

En particulier, si $a = 1$, on obtient les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité $z_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right]$ où k varie dans $\{0, 1, \cdots, n-1\}$. On peut les représenter géométriquement sur le cercle unité par les sommets d'un polygone régulier à n côtés dont l'un d'eux est $z_0 = 1$ (voir dessin ci-dessous pour $n = 6$).



• Dans $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, l'équation du second degré $x^2+1=0$ a deux solutions i et $-i$. Qu'en est-il pour $az^2+bz+c=0$ (a, b et c étant des complexes avec, bien sûr, $a \neq 0$) ? En la mettant sous la forme :

$$a\left\{\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\} = 0$$

on voit tout de suite que le problème se ramène au calcul des racines carrées du nombre complexe $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$; et ça on sait le faire bien entendu (*cf.* Exercice 1).

Le cas le plus ardu est celui de l'équation $P(z)=0$ où P est un polynôme (à coefficients complexes) de degré $n \geq 3$. On sait montrer qu'elle admet une solution : c'est le *théorème fondamental de l'algèbre* (voir Complément 1 page 109). On dit que le corps $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est *algébriquement clos.* Mais on ne sait pas toujours trouver explicitement les solutions.

3.3. Quelques applications

• La formule de Moivre (I.12) est une « belle invention » ; elle permet, entre pas mal d'autres choses, de simplifier certains calculs en trigonométrie. Voyons quelques exemples.

– Prenons $n=2$. Alors $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$. En développant le terme de gauche et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les formules bien connues :

$$\cos(2\theta) = (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta.$$

– Prenons $n=3$. Alors $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$. De même, en développant le terme de gauche et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les formules bien connues :

$$\cos(3\theta) = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4(\sin\theta)^3.$$

– En prenant $n=4$, on obtient :

$$\cos(4\theta) = (\cos\theta)^4 - 6(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2 + (\sin\theta)^4$$

et :

$$\sin(4\theta) = 4\left((\cos\theta)^3\sin\theta - \cos\theta(\sin\theta)^3\right).$$

Ces méthodes sont aussi efficaces pour « linéariser » certaines expressions sous forme de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$; cela permet de faciliter la recherche de primitives et par

suite le calcul d'un certain type d'intégrales. Sans trop insister là-dessus, nous donnons juste le cas de :

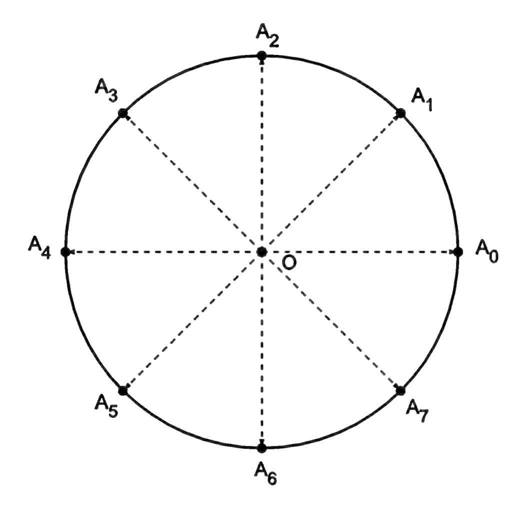
$$(\cos\theta)^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} \quad \text{et} \quad (\sin\theta)^3 = \frac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$$

dont les primitives respectives sont :

$$\frac{\sin(2\theta)+2\theta}{4} + \text{constante} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos(3\theta) - 9\cos\theta}{12} + \text{constante}.$$

• Une application qui donne une remarque en géométrie. Soit $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ la « première » racine $n^{\text{ème}}$ de 1. Comme $(1+w+w^2+\cdots+w^{n-1})(w-1) = w^n - 1 = 0$ et que $w \neq 1$, on a $1+w+\cdots+w^{n-1} = 0$ qui se traduit géométriquement par (*cf.* dessin ci-dessous pour $n = 8$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{0}.$$



Cette relation en elle-même n'est pas étonnante : elle dit simplement que le point O est l'isobarycentre des sommets du polygone régulier $A_0A_1\cdots A_{n-2}A_{n-1}$ comme on pouvait s'y attendre. Si on prend par exemple $w = j$ (racine cubique de l'unité), la relation $1+j+j^2 = 0$ est d'une grande utilité (voir exercice 5).

EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

Résoudre l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes avec $a \neq 0$.

Solution

On met le polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$ sous sa forme canonique $a\left\{\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$. On voit apparaître l'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ qu'on appelle *discriminant* du polynôme P. Il existe alors un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$ (il y en a un autre qui est $-\delta$). D'où la forme factorisée :

$$P(z) = a\left\{\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right\} = a\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right).$$

Ce qui nous donne les deux solutions $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$. Reste évidemment le calcul de δ qui n'est pas si immédiat que cela. Il y a deux façons de le faire.

• Si Δ se présente sous la forme $re^{i\theta}$ de façon explicite (on reconnaît bien r et θ), alors on a bien entendu $\delta = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

• Sinon, on procède de façon artisanale. On pose $\delta = x + iy$ et on cherche x et y de telle sorte que $(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$ où $\Delta = \alpha + i\beta$. Ce qui nous donne le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

dont des solutions sont les réels $x = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}$ et $y = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}$. (On pourrait aussi prendre $x = -\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}$ et $y = -\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}$ mais cela ne change pas les solutions de l'équation du second degré de départ.)

Exercice 2

Résoudre l'équation $z^6 + z^3 - 2 = 0$.

Solution

On pose $u = z^3$ et on récupère alors l'équation du second degré $u^2 + u - 2 = 0$. Celle-ci a comme racines évidentes $u_1 = 1$ et $u_2 = -2$. L'équation de départ $z^6 + z^3 - 2 = 0$ a donc pour solutions $z_1 = 1$, $z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $z_3 = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$, $z_4 = -2^{\frac{1}{3}}$, $z_5 = 2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\pi}{3}}$, $z_6 = 2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression plus simple de :

$$A = \sum_{k=0}^{n} a^k \cos(k\theta).$$

Expliciter le cas particulier où $a = 1$.

Solution

Comme $e^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$ (formule de Moivre), la somme $A = \sum_{k=0}^{n} a^k \cos(k\theta)$ est la partie réelle de $\sum_{k=0}^{n} a^k e^{ik\theta}$ qui elle vaut $\frac{1-a^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{1-ae^{i\theta}}$. Pour le calcul effectif, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression $1 - ae^{-i\theta}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a^k e^{ik\theta} &= \frac{(1-a^{n+1}e^{i(n+1)})(1-ae^{-i\theta})}{(1-ae^{i\theta})(1-ae^{-i\theta})}\\ &= \frac{1-ae^{-i\theta}-a^{n+1}e^{i(n+1)}+a^{n+2}e^{in\theta}}{1-2a\cos\theta+a^2}\\ &= \frac{1-a\cos\theta-a^{n+1}\cos(n+1)\theta+a^{n+2}\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}+iB\end{aligned}$$

où B est la partie imaginaire de l'expression $\sum_{k=0}^{n} a^k e^{ik\theta}$. Finalement :

$$A = \frac{1-a\cos\theta-a^{n+1}\cos(n+1)\theta+a^{n+2}\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}.$$

Si on fait $a = 1$ dans cette expression, on a :

$$\begin{aligned}A &= \frac{1-\cos\theta-\{\cos(n+1)\theta-\cos n\theta\}}{2(1-\cos\theta)}\\ &= \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\sin\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\\ &= \frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\\ &= \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Exercice 4

Soient A, M et P trois points du plan complexe $\mathbb{C}$ ayant respectivement pour affixes 1, $z \neq 1$ et z^2. Pour quelles valeurs de z, le triangle AMP est-il rectangle et isocèle en A ?

Solution

Dire que le triangle AMP est rectangle et isocèle en A, c'est dire que l'angle géométrique $\widehat{MAP}$ est droit et que les côtés AM et AP sont égaux. Cela se traduit comme suit :

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } ||\overrightarrow{AM}|| = ||\overrightarrow{AP}||.$$

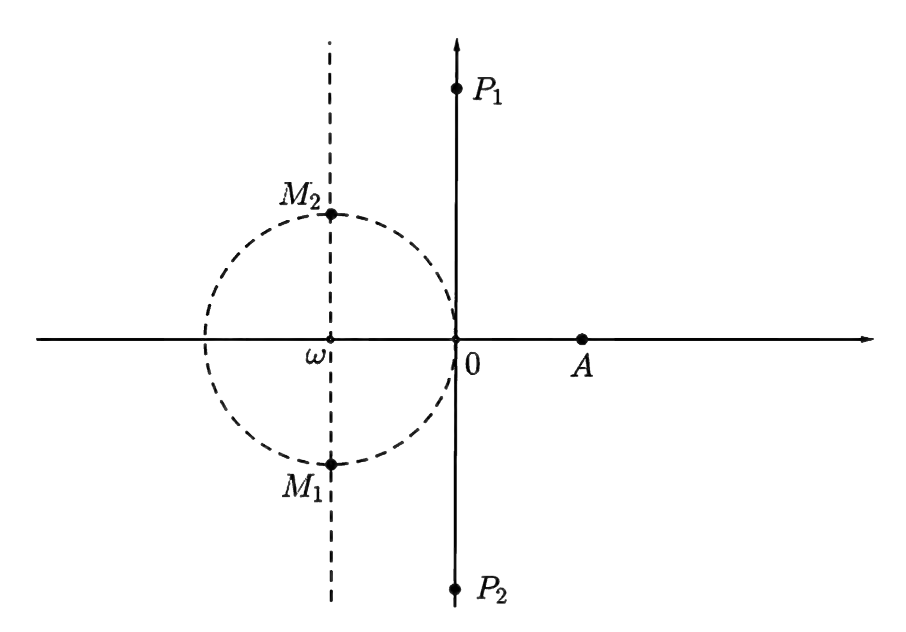
En termes d'affixes :

$$\left\{\operatorname{Arg}\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right)=\frac{\pi}{2} \text{ ou } \operatorname{Arg}\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right)=-\frac{\pi}{2}\right\} \text{ et } |z^2-1|=|z-1|.$$

Ou encore :

$$\left\{\operatorname{Arg}(z+1)=\frac{\pi}{2} \text{ ou } \operatorname{Arg}(z+1)=-\frac{\pi}{2}\right\} \text{ et } |z+1|=1.$$

Ceci nous dit que M doit se trouver sur la droite d'équation $x=-1$ et sur le cercle de centre le point ω d'affixe -1 et de rayon 1 (voir le dessin ci-dessous). Il y a donc deux solutions : le point M_1 d'affixe $z_1=-1-i$ et le point M_2 d'affixe $z_2=-1+i$; les points P_1 et P_2 qui leur sont associés ont respectivement pour affixes $z_1^2=2i$ et $z_2^2=-2i$.



Exercice 5

Soient a, b et c trois nombres complexes. Montrer que le triangle abc est équilatéral si, et seulement si, a, b et c vérifient $a+jb+j^2c=0$ ou $a+j^2b+jc=0$.

Solution

Remarquons tout d'abord que, pour toute similitude σ (qui s'écrit $\sigma(z)=\alpha z+\beta$ si elle est directe et $\sigma(z)=\alpha\bar{z}+\beta$ sinon), le triangle abc est équilatéral si, et seulement si, $\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)$ l'est. D'autre part, comme $1+j+j^2=0$, un calcul simple montre :

$$a+jb+j^2c=0 \Longleftrightarrow \sigma(a)+j\sigma(b)+j^2\sigma(c)=0 \quad \text{si } \sigma \text{ est directe}$$

et

$$a+jb+j^2c=0 \Longleftrightarrow \sigma(a)+j^2\sigma(b)+j\sigma(c)=0 \quad \text{si } \sigma \text{ est indirecte.}$$

– Si $a=b=c$, les relations $a+jb+j^2c=0$ et $a+j^2b+jc=0$ sont évidentes puisque $1+j+j^2=0$. Réciproquement, si on a à la fois $a+jb+j^2c=0$ et $a+j^2b+jc=0$, un calcul simple amène alors à $a=b=c$ et le triangle abc est donc trivialement équilatéral.

– Désormais, abc sera non réduit à un point.

• Supposons abc équilatéral et notons ω le centre de son cercle circonscrit. Alors la similitude $\sigma(z) = \frac{z-\omega}{a-\omega}$ envoie a sur $a' = 1$ et b et c respectivement sur $b' = j$ et $c' = j^2$ ou $b' = j^2$ et $c' = j$ (car le triangle $a'b'c'$ doit être équilatéral).

Si $b' = j$ et $c' = j^2$, on a :

$$a' + jb' + j^2c' = 1 + j^2 + j = 0$$

et donc $a + jb + j^2c = 0$; si $b' = j^2$ et $c' = j$, on a :

$$a' + j^2b' + jc' = 1 + j + j^2 = 0$$

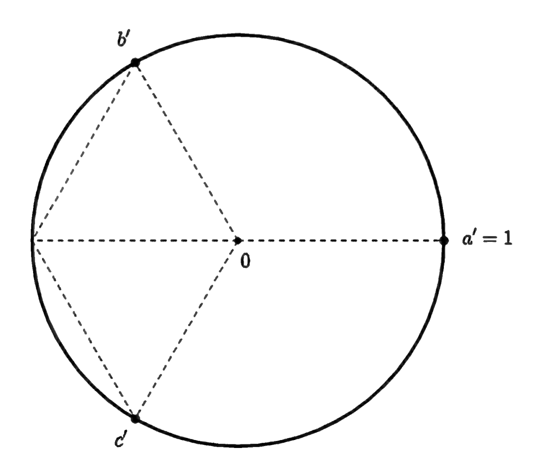
et donc $a + j^2b + jc = 0$. Ceci démontre l'implication directe.

• On suppose $a + jb + j^2c = 0$ et $a + j^2b + jc \neq 0$. (Le problème se traite de la même façon en partant de l'hypothèse $a + j^2b + jc = 0$ et $a + jb + j^2c \neq 0$. Le cas $a + jb + j^2c = 0$ et $a + j^2b + jc = 0$ a déjà été considéré.) Il est alors clair que $b \neq c$. Et tout cela interdit à a d'être le milieu $\frac{b+c}{2}$ de b et c car sinon les deux égalités $a = -(jb + j^2c)$ et $2a = b + c$ entraineraient $b = c$, ce qui n'est pas le cas comme on vient de le voir. On en déduit que le centre ω du cercle circonscrit à abc est distinct de a.

On va montrer que le triangle abc est équilatéral. À cet effet on utilise la similitude $\sigma(z) = \frac{z-\omega}{a-\omega}$; elle envoie a sur $a' = 1$ et b et c respectivement sur b' et c', tous les deux sur le cercle unité. On aura alors $1 + jb' + j^2c' = 0$. Un examen attentif du dessin ci-dessous montre que cette dernière relation n'a lieu que si :

$$b' = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = j \quad \text{et} \quad c' = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = j^2$$

i.e. le triangle $a'b'c'$ est équilatéral, donc abc l'est aussi. □



Certes, on peut se passer de l'utilisation des similitudes et faire le calcul directement, mais on perd la géométrie (qu'on vient de voir) liée à la régularité de la répartition des nombres 1, j et j^2 sur le cercle unité.

Exercice 6

On munit le plan euclidien $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Un point M de $\mathcal{P}$ sera repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y) ou par son affixe $z = x + iy$ si on identifie $\mathcal{P}$ au plan complexe $\mathbb{C}$.

On note Γ le cercle de centre O et de rayon 1. Soit f l'application de $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \backslash \{O\}$ dans $\mathcal{P}$ qui, au point M d'affixe z, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z' = z + i - \frac{1}{z}$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$. Les affixes de leurs images A' et B' par l'applications f seront notées respectivement a' et b'.

1 - Calculer a' et b'.

2 - Placer les points A, A', B et B' dans le plan $\mathcal{P}$.

3 - Quelle est la nature du triangle OBB' ?

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}^*$ dont l'image par f est le point O.

4 - Pour tout nombre complexe z, déterminer les deux complexes α et β tels que :

$$z^2 + iz - 1 = (z - \alpha)(z - \beta).$$

En déduire l'affixe de chacun des points de $\mathcal{E}$.

5 - Démontrer que $\mathcal{E}$ est contenu dans Γ.

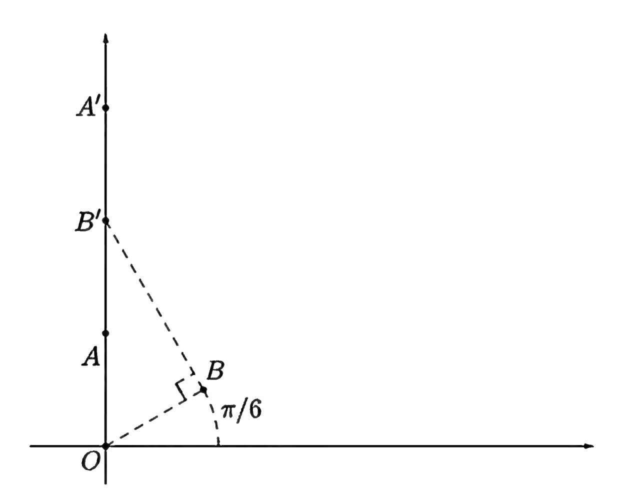
6 - Déterminer z' lorsque $z = e^{i\theta}$.

7 - En déduire que si M appartient au cercle Γ alors $M' = f(M)$ appartient au segment $[A'C]$ où C est le point d'affixe $c = -i$.

Solution

1 - On a $a' = i + i - \frac{1}{i} = 3i$ et $b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}} = i + 2i\sin(\frac{\pi}{6}) = 2i$.

2 - Les points A, A', B et B' sont placés sur la figure ci-dessous.



3 - On a $b' - b = 2i - e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3}i)$. D'où $OB^2 + BB'^2 = OB'^2$; le triangle OBB' est donc rectangle en B.

4 - On a :

$$\begin{aligned} z^2+iz-1 &= \left(z^2+iz-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4} \\ &= \left(z+\frac{i}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ et $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$.

5 - Les points de l'ensemble $\mathcal{E}$ sont ceux dont les affixes annulent z^2+iz-1 ; ils ne sont que deux $\alpha=-e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\beta=e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Ils sont de module 1, donc sur le cercle Γ *i.e.* $\mathcal{E}\subset\Gamma$.

6 - L'affixe z du point M vaut $e^{i\theta}$ où θ est un réel. L'affixe de $M'=f(M)$ est alors $z'=e^{i\theta}+i-e^{-i\theta}=(2\sin\theta+1)i$.

7 - Comme $z'=(2\sin\theta+1)i$ le point M' varie sur l'axe imaginaire. Lorsque θ varie sur le cercle, le nombre θ varie dans $\mathbb{R}$ (tout entier !) et donc la partie imaginaire $2\sin\theta+1$ de z' varie entre son minimum -1 et son maximum 3. Par suite le point M décrit le segment $[A'C]$ où C est le point d'affixe $c=-i$.

CHAPITRE II

SÉRIES ENTIÈRES

1. Rappels sur les séries numériques

On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = x_0 + \cdots + x_n$; on obtient ainsi une nouvelle suite (S_n). Si (S_n) converge, on dit que la *série* de *terme général* x_n converge ; la limite S de (S_n) est la *somme* de la série (les quantités S_n sont appelées *sommes partielles*) ; on écrit $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Sinon, on dira que la série est *divergente*. Dorénavant la notation (x_n) désignera indifféremment la suite x_n ou la série qu'elle définit. Étudier la nature d'une série, c'est étudier sa convergence ou sa divergence.

On dira qu'une série (x_n) est *absolument convergente* si la série réelle à termes positifs $(|x_n|)$ est convergente. Toute série absolument convergente est convergente ; dans ce cas, on a :

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

La réciproque de cette implication est en général fausse (cf. exercice 7 sous-section 1.8).

Y a-t-il des critères qui permettent de décider de la convergence d'une série ? Oui, bien sûr ! D'abord, comme étudier une série revient en fait à étudier une suite, il y a le :

1.1. Critère de Cauchy. Il est lié à la complétude du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et illustré par l'équivalence des assertions qui suivent :

i) la série de terme général x_n converge ;
ii) la suite $S_n = x_0 + \cdots + x_n$ converge (par définition) ;
iii) la suite (S_n) est de Cauchy *i.e.* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ on ait : $n > m \geq N \Longrightarrow |S_n - S_m| = |x_{m+1} + \cdots + x_n| < \varepsilon$.

Lorsque tous les termes x_n sont des réels positifs, on dispose de pas mal de critères de convergence. Donnons-en quelques-uns. (Comme les termes nuls ne modifient en rien la nature de la série, on supposera que tous les x_n sont strictement positifs.)

1.2. Sommes partielles bornées. Supposons que les sommes partielles $S_n = x_0 + \cdots + x_n$ soient bornées par une constante $M > 0$ indépendante de n. Alors la suite (S_n) est croissante majorée par M, donc convergente *i.e.* la série (x_n) est convergente.

1.3. Critère de comparaison. On considère deux séries (x_n) et (y_n). On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $x_n \leq y_n$. Si la série (y_n) converge, il en est de même pour la série (x_n) ; si la série (x_n) diverge, il en est de même pour la série (y_n). Pour montrer la convergence (resp. la divergence) d'une série à termes positifs, il suffit donc de la majorer (resp. la minorer) par une série qui converge (resp. qui diverge).

1.4. Règle de d'Alembert. On suppose que la suite $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ converge vers une limite ℓ. Si $\ell < 1$, la série converge ; si $\ell > 1$, la série diverge. On ne peut rien dire en général lorsque $\ell = 1$. Mais il est possible que cette limite n'existe pas ; dans ce cas on peut utiliser uniquement le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$:

- S'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \alpha$ pour n suffisamment grand, la série converge.
- Si $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ pour n suffisamment grand, la série diverge.

1.5. Règle de Cauchy. On suppose que la suite $(x_n)^{\frac{1}{n}}$ converge vers une limite ℓ. Si $\ell < 1$, la série (x_n) converge ; si $\ell > 1$, elle diverge. On ne peut rien dire en général lorsque $\ell = 1$. Comme précédemment, il est possible que cette limite n'existe pas ; dans ce cas on peut utiliser uniquement la suite $(x_n)^{\frac{1}{n}}$:

- S'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $(x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \alpha$ pour n suffisamment grand, la série converge.
- Si $(x_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$ pour n suffisamment grand, la série diverge.

Utiliser ce critère pour étudier la convergence ou la divergence de la série de terme général $x_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-n^2}$.

1.6. Comparaison à une intégrale. Petit rappel d'abord. Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction, continue (pour simplifier). Pour tout $t \in [1, +\infty[$, on pose $F(t) = \int_1^t f(\theta)d\theta$. La fonction $F : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie est croissante. Si la limite de F existe lorsque t tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est *convergente*.

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante. Alors la série de terme général $x_n = f(n)$ $(n \geq 1)$ est convergente si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

1.7. Opérations sur les séries

On se donne deux séries (x_n) et (y_n) de nombres complexes. On définit la *somme* des deux comme étant $(x_n + y_n)$ et leur *produit* sera la série de terme général :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

Alors :

i) si (x_n) et (y_n) sont convergentes, $(x_n + y_n)$ est aussi convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

ii) si (x_n) et (y_n) sont absolument convergentes, (w_n) est aussi absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right).$$

1.8. Quelques exercices

1. Soit a un nombre réel non nul. Étudier, en fonction de a, la nature de la série de terme général $x_n = a^n$ dite *série géométrique* de *raison* a.

2. Montrer que la série de terme général $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ (dite *série harmonique*) est divergente. (On utilisera le critère de Cauchy.)

3. Soit α un nombre réel strictement positif. On appelle *série de Riemann* la série numérique de terme général $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Étudier, en fonction de α, la nature de cette série. (On utilisera le critère de comparaison à une intégrale convenable.)

4. Soient (x_n) et (y_n) deux séries à termes strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = \sqrt{x_n y_n}$. Montrer que si (x_n) et (y_n) sont convergentes, il en est de même pour la série (z_n).

5. Étudier la nature des séries dont les termes généraux respectifs sont les suivants (pour $n \geq 1$) :

$$x_n = (-1)^n, \qquad y_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}, \qquad z_n = \frac{1}{n^2 - n + 1} \qquad \text{et} \qquad t_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^5-1}}.$$

6. Montrer que les séries numériques :

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$$

sont convergentes et calculer leurs sommes respectives.

Séries réelles alternées

On dira qu'une série réelle (x_n) est *alternée* si elle s'écrit $x_n = (-1)^n u_n$ où $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit (x_n) une telle série. Supposons que la suite u_n tend en décroissant vers 0 ; alors la série (x_n) converge.

7. Soit (x_n) la série de terme général $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Dire pourquoi cette série est convergente mais non absolument convergente.

b) Appliquer convenablement la formule de Mac-Laurin à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ pour calculer la somme de cette série.

c) On considère maintenant la série de terme général $y_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)}$. Montrer qu'elle converge et calculer sa limite. Conclusion ?

8. On considère les séries $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n^2}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Que peut-on conclure ?

9. Soit (x_n) une suite à termes strictement positifs. On suppose que pour un réel $p \geq 1$, la série (x_n^p) converge. Montrer que, pour tout réel q tel que $q \geq p$, la série (x_n^q) converge.

2. Séries entières

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, on pose :

(II.1) $$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

On définit ainsi une fonction $S_N : z \in \mathbb{C} \longmapsto S_N(z) \in \mathbb{C}$. On se pose une question toute naturelle : *pour quelles valeurs de z la limite (quand N tend vers $+\infty$) de la quantité $S_N(z)$ existe-t-elle ?* La proposition qui suit est facile à démontrer :

2.1. Proposition. *S'il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho\}$ pour tout $\rho < r$.*

Si tel est le cas, on a donc une fonction f bien définie sur le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

On appelle **rayon de convergence** *de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le plus grand nombre réel positif R (fini ou égal à $+\infty$) tel que la série converge pour $|z| < R$.* Ce nombre peut être nul, strictement positif ou égal à $+\infty$ comme on le verra sur les exemples qui vont suivre.

On suppose les coefficients a_n tous non nuls. Le rayon de convergence R de la série est alors donnée par l'une des formules qui suivent.

(II.2) $$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad \text{(Formule de Hadamard)}$$

(II.3) $$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{(Formule de d'Alembert)}$$

Le lemme qui suit est très utile dans l'étude de la convergence des séries entières.

2.2. Lemme d'Abel. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ une série où les a_n sont réels positifs et les x_n des nombres complexes. On suppose :*

i) *que la suite (a_n) est décroissante et tend vers 0 ;*
ii) *qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $|\sum_{k=0}^{n} x_k| \leq M$ pour tout $n \geq 0$.*
Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ converge.

Il permet, entre autres, d'établir la proposition qui suit.

2.3. Proposition. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

i) *pour tout $r < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D}(0, r)$.*
ii) *pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge.*

On dira que $D(0, R)$ est le **disque de convergence** *de la série.*

Tout peut se produire sur le cercle $|z| = R$. On donnera des exemples sur lesquels on peut voir différentes situations.

2.4. Exemples

• La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) z^n$ a un rayon de convergence $R = 0$: elle ne converge que pour $z_0 = 0$.

• Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ont un rayon de convergence $R = 1$. La différence est notable au niveau de la convergence sur le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$:

la première y diverge, la deuxième y converge sauf en $z = 1$ et la troisième y converge en tout point ! (Le lecteur est prié de justifier toutes ces affirmations.)

2.5. Exercice

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière réelle d'intervalle de convergence $]-R, R[$ avec $R > 0$. Montrer que, pour $s \in \mathbb{N}^*$, la série *dérivée* $s^{\text{ème}}$ de f :

$$f^{(s)}(x) = \sum_{n=s}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-s+1)a_n x^{n-s}$$

a aussi pour intervalle de convergence $]-R, R[$.

2.6. Rayon de convergence d'une somme et d'un produit

Une série entière s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; elle est donc donnée par la suite (a_n) de nombres complexes (a_n). On en parlera toujours en se référant à cette suite.

Soient (a_n) et (b_n) deux séries entières. Leur somme est la série entière de coefficient général $(a_n + b_n)$ et leur produit (de Cauchy) a pour coefficient général :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Notons R_1 et R_2 les rayons de convergence respectivement de (a_n) et (b_n).

• Supposons $R_1 \neq R_2$. On vérifie facilement (on laisse ça au lecteur) que la série somme $(a_n + b_n)$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_1, R_2)$.

• Si $R_1 = R_2$ le rayon de convergence R de la somme est $R \geq R_1$. Il peut être égal à $R_1 = R_2$. Mais il peut être aussi strictement plus grand ; par exemple si (a_n) a pour rayon $R_1 \in]0, +\infty[$ et si on prend $b_n = -a_n$, la série $(a_n + b_n)$ (dont tous les termes sont nuls) a évidemment $R = +\infty$ pour rayon de convergence.

• La série produit (c_n) a un rayon de convergence R qui est plus grand ou égal à $\min(R_1, R_2)$. Il peut être strictement plus grand comme le montre l'exemple $a_n = 1$ pour tout n et pour (b_n) on prend $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ et $b_n = 0$ pour $n \geq 2$. On voit tout de suite que (a_n) a $R_1 = 1$ pour rayon de convergence, (b_n) a $R_2 = +\infty$ pour rayon de convergence. D'autre part, un calcul immédiat donne $c_0 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 1$. Donc la série (c_n) a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

3. Exponentielle et logarithme complexes

Nous avons vu que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ la quantité $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ existe donc ; elle sera notée e^z. On a alors une fonction bien définie $z \in \mathbb{C} \longmapsto e^z \in \mathbb{C}$ appelée *exponentielle complexe.* Comme la série converge uniformément sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$, cette fonction est continue. En fait on a plus :

3.1. Proposition. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes.*

i) *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$.*

ii) *L'exponentielle est un morphisme du groupe additif* $(\mathbb{C},+)$ *dans le groupe multiplicatif* $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Démonstration. i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Un calcul utilisant la formule du binôme de Newton montre que $w_n = \frac{(z+z')^n}{n!}$. D'après 1.7.ii) la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$ converge et on a :

$$e^{z+z'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z'^\ell}{\ell!}\right) = e^z \cdot e^{z'}.$$

ii) Comme $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a $e^0 = 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$; alors $e^{z+(-z)} = e^z \cdot e^{-z} = 1$ et donc $e^z \in \mathbb{C}^*$. Le fait que l'exponentielle soit un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$ est donné par le point i). Nous verrons par la suite qu'il est surjectif mais non injectif (et on déterminera son noyau). □

De cette proposition il découle que $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. On connaît assez bien l'exponentielle e^x (x est réel). Décortiquons e^{iy}. On a :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{y^{2p}}{(2p)!}\right) + i \left(\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{y^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) = \cos y + i \sin y.$$

D'où $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$; par suite le module de e^z est e^x et son argument $\operatorname{Arg}(z)$ est y (modulo 2π).

3.2. Autres fonctions

L'exponentielle complexe permet de définir d'autres fonctions généralisant celles que l'on connaît habituellement dans le domaine réel.

• Fonctions trigonométriques circulaires. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Mais aussi :

$$\operatorname{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}\backslash\{\tfrac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

et :

$$\operatorname{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

• Fonctions trigonométriques hyperboliques. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose :

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Mais aussi :

$$\operatorname{th}(z) = \frac{\operatorname{sh}(z)}{\operatorname{ch}(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{2k+1}{2} i\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

et :

$$\operatorname{coth}(z) = \frac{\operatorname{ch}(z)}{\operatorname{sh}(z)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{ki\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Les quatre fonctions cos, sin, ch et sh ont comme développement en série entière :

$$\cos(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} \qquad \sin(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

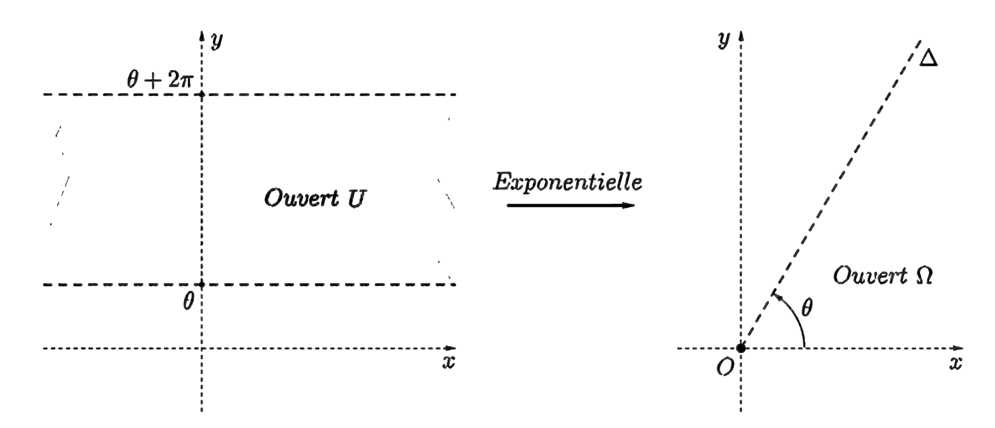
$$\operatorname{ch}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p}}{(2p)!} \qquad \operatorname{sh}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

chacune d'elles ayant un rayon de convergence infini.

3.3. Logarithme complexe

Dans le cas réel la fonction exponentielle $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \in \mathbb{R}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En fait, c'est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. La fonction réciproque est bien connue : c'est le logarithme $t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(t) \in \mathbb{R}$. La situation est différente pour le cas complexe : certes l'exponentielle $z \in \mathbb{C} \longmapsto e^z \in \mathbb{C}^*$ est surjective mais elle n'est pas injective, ce qui pose un problème pour définir sa « fonction réciproque ». Il y en aura beaucoup ; on dira alors que c'est une fonction *multiforme*. Pour en avoir une il faut se restreindre à des ouverts du plan complexe $\mathbb{C}$.

Pour tout $z = x + iy$ on a bien sûr $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Cette fonction envoie la droite d'équation $y = \theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$) sur la demi-droite Δ ouverte (l'origine n'y est pas) faisant un angle θ (modulo 2π) avec l'axe Ox (*cf.* le dessin qui suit). On voit alors que f réalise une bijection de l'ouvert $U = \mathbb{R} \times]\theta, \theta + 2\pi[$ sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}^* \setminus \Delta$.



Une *détermination* de la fonction logarithme complexe devrait être bien sûr de la forme $g(w) = \ln(|w|) + i\operatorname{Arg}(w)$ pour qu'elle vérifie $e^{g(w)} = w$. La *détermination principale* est donnée pour $\theta = -\pi$: $g_0(w) = \ln(|w|) + i\operatorname{Arg}(w)$ sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$. Toute autre détermination est de la forme $g_k = g_0 + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Fonctions analytiques

4.1. Variable réelle

• Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *analytique réelle* si tout point $x_0 \in I$ possède un voisinage ouvert $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$ sur lequel la fonction f s'écrit sous forme d'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ où (a_n) est une suite de nombres complexes. Pour $0 < \eta < \varepsilon$, la série converge uniformément sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ et donc f est continue. Plus même : d'après l'exercice 2.5, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ la série $s^{\text{ème}}$ dérivée $f^{(s)}(x) = \sum_{n=s}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-s+1)a_n x^{n-s}$ converge uniformément sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. La fonction f est donc de classe C^∞.

Par exemple, parmi les fonctions usuelles, toutes celles qui suivent sont analytiques là où elles sont définies :

Une fonction polynôme $\qquad P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

Une fonction rationnelle $\qquad \dfrac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$

$\ln(x) \qquad e^x \qquad \mathrm{ch}(x) \qquad \mathrm{sh}(x) \qquad \cos(x) \qquad \sin(x).$

Une fonction de classe C^∞ n'est pas forcément analytique. L'exemple le plus simple et le plus connu est celui de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

(La démonstration est laissée en exercice au lecteur.)

• Soient maintenant U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout point $z_0 = (x_0, y_0) \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que sur le disque ouvert $D(z_0, \varepsilon) \subset U$, f admet un développement en série entière :

$$f(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm}(x - x_0)^n (y - y_0)^m$$

où les a_{nm} sont des constantes complexes. Comme dans le cas d'une variable, la série converge uniformément sur tout compact du disque $D(z_0, \varepsilon)$ ainsi que toutes les dérivées partielles. La fonction est donc de classe C^∞.

4.2. Variable complexe

• Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f est *analytique* si, pour tout $z_0 \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que, sur le disque ouvert $D(z_0, \varepsilon)$, f s'écrit sous forme d'une série entière :

(II.4) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

où les a_n sont des constantes complexes.

Par exemple, comme dans le cas d'une variable réelle, les fonctions qui suivent sont analytiques là où elles sont définies :

Une fonction polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$

Une fonction rationnelle $\dfrac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$

$\ln(z)$ e^z $\text{ch}(z)$ $\text{sh}(z)$ $\cos(z)$ $\sin(z)$.

Il existe des fonctions qui ne sont pas analytiques (au sens complexe) : par exemple la fonction $z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$. Mais elle est analytique en tant que fonction des deux variables réelles x et y puisque $\overline{z} = x - iy$. L'analyticité réelle d'une fonction d'une variable complexe n'implique donc pas l'analyticité de celle-ci.

• On vérifie aisément que la somme $f + g$, le produit fg, le quotient $\frac{f}{g}$ (là où il est défini) de deux fonctions analytiques f et g sont des fonctions analytiques. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions analytiques avec $f(U) \subset V$ la composée $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction analytique.

4.3. Unicité du développement. *Supposons que deux séries entières* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ *convergeant sur un disque* $D(z_0, R)$ *coïncident sur une suite* $(z_k)_{k \geq 1}$ *(dans ce disque) s'accumulant sur* z_0. *Alors* $a_n = b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_0 + a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots = b_0 + b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots \tag{II.5}$$

Soit r tel que $0 < r < R$. Comme les deux sommes sont continues sur le disque fermé de centre z_0 et de rayon r, on a :

$$\lim_{k \to \infty} (a_0 + a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots) = \lim_{k \to \infty} (b_0 + b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots)$$

et donc $a_0 = b_0$. L'expression (II.5) devient alors :

$$a_1(z_k - z_0) + a_2(z_k - z_0)^2 + \cdots = b_1(z_k - z_0) + b_2(z_k - z_0)^2 + \cdots$$

On divise les deux membres par $z_k - z_0$ et on refait le même raisonnement ; on obtient alors $a_1 = b_1$. De cette façon on montre que $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Ceci nous permet d'établir le théorème suivant qui donne une propriété remarquable des fonctions analytiques.

4.4. Principe du prolongement analytique. *Soient* f *et* g *deux fonctions analytiques définies sur un ouvert* U *connexe de* $\mathbb{C}$. *Supposons que* f *et* g *coïncident sur les points d'une suite* (z_k) *s'accumulant sur un point* $z_0 \in U$. *Alors* f *et* g *sont égales.*

Démonstration. Soient $z \in U$ différent de z_0 et γ un chemin $[0, 1] \longrightarrow U$ d'origine z_0 et d'extrémité z (il existe car U étant un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ il est aussi connexe par arcs).

Comme $\gamma([0,1]) = C$ (image de la courbe dans $\mathbb{C}$) est un compact, il existe $r > 0$ et un nombre fini de disques ouverts $D_0, D_1, \cdots, D_\ell$ tous de rayon r, centrés respectivement en des points $z_0 = a_0, a_1, \cdots, a_\ell = z$ et tels que :

– $C \subset D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_\ell$;

– le disque D_j contient le point z_{j+1} (centre du disque D_{j+1}) ;

– les fonctions f et g admettent sur chacun des ouverts D_j un développement en série (uniformément convergent).

Comme les fonctions f et g sont égales sur l'ensemble $D_0 \cap \{z_j : j \in \mathbb{N}^*\}$, d'après l'assertion 4.3, elles sont égales sur D_0. Mais D_0 contient le point a_1 qui est un point d'accumulation d'une suite dans D_1 sur laquelle les fonctions f et g vont coïncider. Le même raisonnement montre alors que f et g vont aussi coïncider sur D_1. En poursuivant ainsi, on montre que f et g sont égales sur la réunion $D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_n$ et par suite $f(z) = g(z)$. Comme aucune hypothèse particulière n'a été faite sur le point z, les fonctions f et g sont donc égales sur U. □

4.5. Zéros d'une fonction analytique

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On appelle *zéro* de f tout point $z \in U$ tel que $f(z) = 0$.

Supposons que la fonction f n'est pas identiquement nulle sur U connexe. Alors l'ensemble $Z(f)$ de ses zéros est discret dans U.

Démonstration. Comme f est continue, $Z(f)$ est une partie fermée de U. Montrons que chacun de ses points est isolé. Soit $z_0 \in Z(f)$; alors f se développe sur un voisinage de ce point en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Comme elle n'est pas identiquement nulle sur ce voisinage (sinon elle serait nulle partout en vertu du théorème 4.4) l'un au moins des coefficients a_n est non nul ; soit p le plus petit des entiers n tel que $a_n \neq 0$. Alors on peut écrire $f(z) = (z-z_0)^p Q(z)$ où $Q(z) = (a_p + a_{p+1}(z-z_0) + a_{p+2}(z-z_0)^2 + \cdots)$. La fonction $Q(z)$ étant analytique en z_0 elle y est a fortiori continue et donc non nulle sur un voisinage de z_0. Par conséquent le seul point en lequel f est nulle sur ce voisinage est le point z_0 ; ce qui montre que z_0 est isolé dans $Z(f)$. □

EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On rappelle que le *rayon de convergence* de f est le plus grand $R > 0$ tel que, pour $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$. Donner le rayon de convergence de chacune des séries suivantes.

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, \quad S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$S_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} z^n, \quad S_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \quad S_7 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} z^n.$$

Solution

Pour calculer R, on utilise par exemple la formule de d'Alembert $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Pour $k = 1, \cdots, 7$, on notera R_k le rayon de convergence de la séerie S_k. On a :

$$R_1 = 1, \quad R_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad R_3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad R_4 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty.$$

$$R_5 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

Pour R_6 commençons d'abord par arranger un peu l'expression $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. On a :

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

D'où :

$$R_6 = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \left\{ \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right\} = e^{-1}.$$

Pour R_7, on a :

$$R_7 = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = +\infty.$$

Exercice 2

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. On notera R son rayon de convergence qu'on supposera non nul. Sur le cercle $|z| = R$, on ne sait pas en général ce qui se passe : la série peut converger en certains points et diverger en d'autres. Dans certaines situations on sait donner des réponses.

1 - Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ converge pour tout $z \neq 1$ avec $|z| = 1$. (Utiliser le critère de convergence d'Abel.)

Soit p un nombre entier naturel non nul. Considérons la série entière $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{np}$.

2 - Montrer que son rayon de convergence est égal à 1.

3 - En quels points du cercle $|z| = 1$ la série f converge-t-elle ?

4 - Soient $z_1, \cdots, z_p$ des points sur le cercle (Γ) d'équation $|z| = 1$. Donner un exemple de série entière ayant 1 comme rayon de convergence, divergente sur l'ensemble $\{z_1, \cdots, z_p\}$ et convergente en tout autre point de (Γ).

Solution

1 - Le coefficient de z^n dans cette série est $a_n = \frac{1}{n}$. La suite (a_n) a ses termes réels positifs et tend vers 0 en décroissant. D'autre part, pour tout $z \neq 1$ avec $|z| = 1$, on a :

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left| z \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| = \frac{|z^n - 1|}{|z - 1|} \leq \frac{2}{|z - 1|}.$$

D'après le lemme d'Abel, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ converge donc pour tout $z \neq 1$ tel que $|z| = 1$.

2 - Le cas $p = 1$ est réglé dans la question 1. On suppose donc $p \geq 2$. On pose $w = z^p$. On a évidemment les équivalences :

$$|w| = 1 \Longleftrightarrow |z| = 1, \quad |w| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 1 \quad \text{et} \quad |w| > 1 \Longleftrightarrow |z| > 1.$$

On en déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{np}$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Donc son rayon de convergence vaut 1.

3 - Pour $|z| = 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{np}$ converge sauf pour $z^p = 1$, c'est-à-dire z est une racine $p^{\text{ème}}$ de l'unité *i.e.* $z \in \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{p}}, \cdots, e^{\frac{2i(p-1)\pi}{p}}\right\}$.

4 - En utilisant tout ce qui précède, le lecteur vérifiera lui-même que la série qui suit répond à la question :

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_k^{-1} z)^n}{n} \right).$$

Exercice 3

1 - On considère la fonction d'une variable réelle $f(x) = \ln(1 - x)$. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f. Préciser les valeurs de x pour lesquelles ce développement est valable.

Considérons la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où x est réel et $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

2 - Calculer le rayon de convergence R de la série S.

3 - On pose $g(x) = x^3 S(x)$. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $\frac{g'(x)}{x}$ (g' désigne la dérivée de g).

4 - En déduire l'expression explicite (en termes de fonctions élémentaires bien connues) de la somme de la série S.

Solution

1 - La fonction $-f$ est la primitive qui s'annule en 0 de $h(x) = \frac{1}{1-x}$; celle-ci admet le développement en série entière $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec 1 pour rayon de convergence ; f aura donc un développement en série entière donné comme suit:

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Le rayon de convergence est le même *i.e.* égal à 1. □

2 - On calcule la limite du rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ quand n tend vers l'infini qui est précisément le rayon de convergence R de la série $S(x)$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} = 1.$$

□

3 - On a :

$$g(x) = x^3 S(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

et donc :

$$g'(x) = \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2} + \cdots + \frac{x^{n+2}}{n+1} + \cdots$$

Par suite :

$$\frac{g'(x)}{x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = -\ln(1-x).$$

D'où $x^3 S(x) = -\int_0^x t\ln(1-t)dt$. Pour calculer cette intégrale, on procède par intégration par parties en posant $du = t$ et $v = -\ln(1-t)$. Ce qui donne :

$$x^3 S(x) = -\int_0^x t\ln(1-t)dt = \left[-\frac{t^2}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{t}{2}\left(1+\frac{t}{2}\right)\right]_0^x.$$

On obtient finalement la somme de la série $S(x) = \frac{1}{2x^3}\left((1-x^2)\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\right)$. Ce qui termine le calcul. □

Exercice 4

On considère l'équation différentielle suivante dans laquelle x représente une fonction réelle de la variable t :

$$tx'' + 3x' - 4t^3 x = 0.$$

1 - Montrer qu'il existe une solution unique x de cette équation différentielle donnée sous forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et vérifiant la condition $x(0) = 1$. Calculer explicitement le rayon de convergence R de cette série.

2 - Donner l'expression de x en termes de fonctions élémentaires bien connues.

Solution

1 - Si une telle solution existe, elle s'écrit $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ où $t \in]-R, +R[$ avec $R > 0$, rayon de convergence de cette série entière. Pour tout réel ρ tel que $0 < \rho < R$, la série converge uniformément sur l'intervalle compact $[-\rho, +\rho]$; on peut donc dériver sous le signe somme. On aura alors :

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

Ce qui donne :

$$tx''(t) + 3x'(t) - 4t^3 x(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n t^{n-1} - \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4} t^{n-1}$$

c'est-à-dire :

$$tx''(t) + 3x'(t) - 4t^3 x(t) = 3a_1 + 8a_2 t + 15a_3 t^2 + \sum_{n=4}^{\infty} \left(n(n+2)a_n - 4a_{n-4}\right) t^{n-1}.$$

Comme $tx''(t) + 3x'(t) - 4t^3 x(t) = 0$ pour tout $t \in]-R, +R[$, on doit avoir :

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

et

$$n(n+2)a_n - 4a_{n-4} = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 4.$$

D'autre part, la condition initiale $x(0) = 1$ donne $a_0 = 1$. Finalement, les seuls coefficients non nuls de la série sont ceux du type a_{4k} avec $k \in \mathbb{N}$; ceux-là vérifient la relation :

$$a_{4k} = \frac{4a_{4(k-1)}}{4k(4k+2)} = \frac{a_{4(k-1)}}{2k(2k+1)} \quad \text{pour} \quad k \geq 1.$$

Après calcul et simplification, on obtient :

$$a_{4k} = \frac{a_0}{(2k+1)!} = \frac{1}{(2k+1)!}.$$

D'où :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k}}{(2k+1)!}.$$

Calculons d'abord le rayon de convergence R_0 de la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{(2k+1)!}$:

$$R_0 = \lim_{k\to\infty} = \lim_{k\to\infty} \frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} = \lim_{k\to\infty} (2k+2)(2k+3) = +\infty.$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k}}{(2k+1)!}$ est aussi infini. Il y a donc une seule solution x de l'équation différentielle étudiée qui se développe en série entière et qui vérifie $x(0) = 1$.

2 - On a finalement $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{4k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\text{sh } t^2}{t^2}$.

CHAPITRE III

FONCTIONS HOLOMORPHES

1. Préliminaires et premières définitions

1.1. $\mathbb{R}$-linéarité et $\mathbb{C}$-linéarité

• On sait que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même ; il a pour base (entre autres) le nombre 1. Mais si on le voit comme espace vectoriel réel sa dimension est 2 ; une base en est $\{1, i\}$ qui permet d'écrire tout nombre complexe z de façon unique sous la forme qu'on connaît $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

• Une application linéaire $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto f(z) \in \mathbb{C}$ est toujours de la forme $f(z) = \alpha z$ avec $\alpha = f(1)$. Si $\alpha = a + ib$, alors $f(z) = \alpha z = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$. Donc, si on voit f comme application du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}$ dans lui-même, sa matrice par rapport à la base $\{1, i\}$ est nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On peut vérifier facilement qu'une application $\mathbb{R}$-linéraire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ dont la matrice par rapport à cette base est de cette forme est aussi $\mathbb{C}$-linéaire.

Un exemple d'application $\mathbb{R}$-linéaire mais non $\mathbb{C}$-linéaire : $z \in \mathbb{C} \longmapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$. (La vérification est laissée aux soins du lecteur.)

• Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire (mais qu'on voit comme $\mathbb{R}$-linéaire) de matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; alors on peut toujours écrire $A = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ où θ est un réel (donné modulo 2π). Par conséquent, du point de vue géométrique, une application $\mathbb{C}$-linéaire n'est rien d'autre qu'une similitude directe de centre l'origine : c'est la composée de l'homothétie de centre 0 et de rapport $\sqrt{a^2 + b^2}$ et de la rotation de centre 0 et d'angle θ.

1.2. Définition de l'holomorphie

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On dira que f est **holomorphe** *au point $z_0 \in U$ si elle est dérivable en ce point, c'est-à-dire si la limite suivante existe :*

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{III.1}$$

Cette limite est notée $f'(z_0)$ et appelée **dérivée** *de f au point z_0. On dira que f est holomorphe sur U si elle est holomorphe en tout point de U.*

Formellement, c'est la même définition que pour la dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle. Mais en réalité, demander à une fonction d'être holomorphe lui impose des contraintes extrêmement fortes comme nous le verrons par la suite. Regardons d'abord quelques exemples.

• Les fonctions usuelles que nous avons déjà évoquées :

$$\text{Une fonction polynôme} \qquad P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

$$\text{Une fonction rationnelle} \qquad \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

$$\ln(z) \qquad e^z \qquad \mathrm{ch}(z) \qquad \mathrm{sh}(z) \qquad \cos(z) \qquad \sin(z).$$

sont holomorphes (facile à vérifier).

• Toute fonction analytique $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. En effet, f étant analytique, pour tout point $z_0 \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait :

$$\text{(III.2)} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{pour} \qquad |z - z_0| < \varepsilon.$$

On sait alors que la série dérivée $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ converge uniformément pour $|z - z_0| \leq \rho$ avec $0 < \rho < \varepsilon$; donc f est dérivable au point z_0 au sens de la définition 1.2. *i.e.* f est holomorphe en z_0.

• On vérifie facilement (exactement comme on le fait pour les fonctions d'une variable réelle) que la somme $f+g$, le produit fg, le quotient $\frac{f}{g}$ (là où il est défini) de deux fonctions holomorphes sont des fonctions holomorphes.

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes avec $f(U) \subset V$ la composée $g \circ f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe et on a $(g \circ f)'(z) = f'(z) g'(f(z))$. Si $f : U \longrightarrow V$ est une bijection et f est holomorphe en z_0 avec $f'(z_0) \neq 0$, alors f^{-1} est holomorphe en $w_0 = f(z_0)$ et $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

• Une bijection $f : U \longrightarrow V$ (U et V des ouverts de $\mathbb{C}$) holomorphe avec inverse f^{-1} holomorphe est appelée *biholomorphisme* de U sur V. On dira aussi que U et V sont *biholomorphiquement équivalents.*

Par exemple la fonction $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme du demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

L'ensemble $\mathrm{Aut}(U)$ des biholomorphismes d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est un groupe pour la composition des applications. Il est contenu dans le groupe $\mathrm{Diff}(U)$ des difféomorphismes de U et est beaucoup plus petit.

• **Exemple non holomorphe**. La fonction $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(z) = \overline{z}$ n'est holomorphe nulle part. Vérifions-le au point $z_0 = 0$ en calculant $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{\phi(z) - \phi(0)}{z} = \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z}$ lorsque z tend vers 0 par valeurs réelles et lorsque z tend vers 0 par valeurs imaginaires pures. On a :

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \text{ réel } \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \text{ imaginaire } \neq 0}} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

Les deux limites ne coïncident pas, donc ϕ n'est pas holomorphe en 0.

1.3. Conditions de Cauchy-Riemann

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $z_0 \in U$. On sait alors que $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe. Cela signifie que :

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + \varepsilon(z)|z-z_0| \tag{III.3}$$

avec $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \varepsilon(z) = 0$. Écrivons $z = x+iy$, $z_0 = x_0+iy_0$, $f(z) = u(z)+iv(z)$, $f'(z_0) = a+ib$, $z - z_0 = h+ik$ et $\varepsilon = \alpha + i\beta$. Alors l'expression (III.3) devient en coordonnées réelles :

$$\begin{cases} u(x_0+h, y_0+k) - u(x_0,y_0) = ah - bk + \alpha\sqrt{h^2+k^2} \\ v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0,y_0) = bh + ak + \beta\sqrt{h^2+k^2} \end{cases} \tag{III.4}$$

Ceci montre que la fonction $f : (x,y) \in U \longmapsto u(x,y) + iv(x,y) \in \mathbb{C}$ est différentiable au point $z_0 = (x_0, y_0)$ et de différentielle :

$$d_{z_0}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \tag{CR}$$

Les relations (CR) sont appelées *conditions de Cauchy-Riemann.* Cela signifie que f est différentiable au point z_0 (au sens réel) et sa différentielle $d_{z_0}f$ (qui est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) est en fait $\mathbb{C}$-linéaire.

Si on considère f comme fonction complexe des variables réelles x et y, les conditions (CR) s'écrivent aussi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0. \tag{III.5}$$

Comme $z = x+iy$, on a $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. On peut donc considérer z et $\overline{z}$ comme des variables par rapport auxquelles on peut aussi dériver :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Les conditions (CR) s'écrivent donc $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

On peut montrer facilement qu'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiable au point z_0 et vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann est holomorphe en ce point. On a donc l'équivalence :

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe en } z_0 \Longleftrightarrow f \text{ différentiable en } z_0 \text{ et vérifie (CR).}$$

1.4. Quelques conséquences de l'holomorphie

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un domaine (ouvert connexe) U de $\mathbb{C}$.

• Il est clair que $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$ si f est constante. Réciproquement, on vérifie aisément que si $f'(z) = 0$ pour tout $z \in U$ alors f est constante.

• Si la partie réelle, la partie imaginaire, le module ou l'argument de f est constant, la fonction f est constante. Tout ceci découle du fait qu'une fonction holomorphe sur le domaine U y vérifie les conditions de Cauchy-Riemann.

– Si $u = \Re f$ est constante alors $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$; donc $\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(z) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$. Par suite $d_z f = 0$ en tout point $z \in U$, donc f est constante. Le même raisonnement vaut pour la partie imaginaire de f.

– Si le module de f est constant, cela signifie que la fonction $u^2 + v^2$ est constante. Donc $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ et $u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Les conditions (CR) donnent alors :

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

On regarde ces deux relations comme un système linéaire homogène dont les inconnues sont $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. Si son déterminant $u^2 + v^2$ est nul, alors f est identiquement nulle ; sinon $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, donc u est constante et par suite f l'est aussi comme on l'a vu précédemment.

– On suppose maintenant $\mathrm{Arg}(f) = \alpha$ constant. Alors la partie imaginaire $\Im(e^{-i\alpha} f)$ de $e^{-i\alpha} f$ est nulle, donc la fonction $e^{-i\alpha} f$ est constante et par suite f l'est aussi. □

1.5. L'orientation

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si on la regarde comme fonction des deux variables réelles (x, y) on peut l'écrire $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ avec $u, v : U \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann en tout point $z_0 = (x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Si donc la différentielle df_{z_0} n'est pas nulle en z_0, on a :

$$\det(df_{z_0}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right)^2 > 0$$

et donc f préserve l'orientation canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. C'est une propriété géométrique importante des fonctions holomorphes.

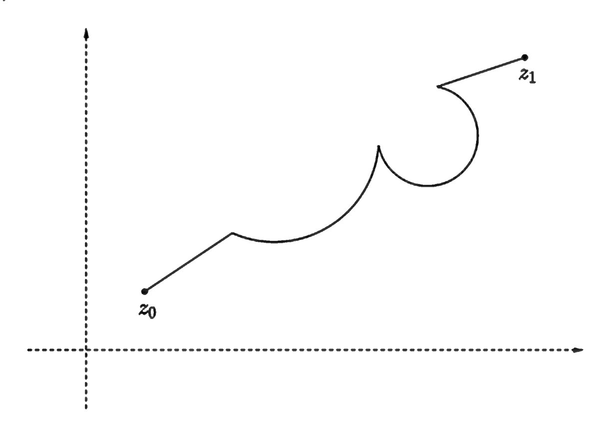
2. Intégration complexe

C'est un outil fondamental en théorie des fonctions d'une variable complexe. Nous allons définir l'intégrale sur un chemin d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ où U est un domaine de $\mathbb{C}$. On supposera f continue puisque, de toutes façons, on n'aura affaire par la suite qu'aux fonctions holomorphes.

2.1. Intégrale sur un chemin

• Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle *chemin* dans U d'*origine* z_0 et d'*extrémité* z_1 toute application continue $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ telle que $\gamma(a) = z_0$ et $\gamma(b) = z_1$. Un chemin fermé est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues *i.e.* $z_0 = z_1$; on dira alors que c'est un *lacet* de base z_0.

On dira qu'un chemin γ est C^1 par *morceaux* s'il existe une subdivision de l'intervalle $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ telle que, pour tout $i = 0, \cdots n-1$, γ soit C^1 sur chacun des intervalles ouverts $]t_i, t_{i+1}[$ et $\gamma'(t)$ admet une limite à droite de t_i et une limite à gauche de t_{i+1}.



• Soit $\gamma : t \in [a,b] \longmapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t) \in U$ un chemin C^1 par morceaux donné comme précédemment. On définit l'*intégrale* de f sur γ comme l'intégrale ordinaire qui suit :

$$\text{(III.6)} \qquad \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))d\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\left\{x'(t) + iy'(t)\right\} dt.$$

• On a les propriétés qui suivent.

– L'intégrale (III.6) ne dépend pas du paramétrage du chemin γ. Vérifions-le pour γ de classe C^1 partout (le cas C^1 par morceaux se traite presque de la même manière). Soit $\tau : s \in [c,d] \longmapsto t = \tau(s) \in [a,b]$ un changement de paramétrage de la courbe γ. Alors, la formule de changement de variable sur les intégrales nous donne :

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_c^d f(\gamma(\tau(s))\tau'(s)\gamma'(\tau(s))ds = \int_c^d f(\gamma\circ\tau(s))(\gamma\circ\tau)'(s)ds$$

qui montre bien l'indépendance de l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ par rapport au paramétrage du chemin γ.

– On a de façon évidente :

$$\int_\gamma (f(z) + g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz, \qquad \text{et} \qquad \int_\gamma \lambda f(z)dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *i.e.* l'intégrale est linéaire en l'argument f.

– Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ un chemin dans U d'origine z_0 et d'extrémité z_1 et C^1 par morceaux. Alors l'application $\gamma^{-1} : [-b,-a] \longrightarrow U$ définie par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(-t)$ est un chemin dans U de classe C^1 par morceaux d'origine z_1 et d'extrémité z_0 ; c'est le chemin γ parcouru en sens inverse. On a :

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

• **Exemple fondamental**. La fonction $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ est définie et holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$. Calculons son intégrale sur le chemin γ (C^1 partout), paramétré par $[0,1]$ et donné par $\gamma(t) = z_0 + re^{2i\pi t}$ où r est un réel strictement positif ; γ est tout simplement le cercle centré en z_0 et de rayon r. On a :

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{1}{re^{2i\pi t}} d(z_0 + re^{2i\pi t}) = 2i\pi \int_0^1 dt = 2i\pi.$$

Si on prend cette fois-ci $\gamma_n(t) = z_0 + re^{2i\pi nt}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ (toujours paramétré par $[0,1]$), alors γ_n est le cercle de centre z_0 et de rayon r décrit n fois dans le sens positif si $n > 0$ et le sens négatif si $n < 0$. Dans ce cas :

$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi n.$$

Nous verrons que, pour tout chemin fermé γ ne passant pas par z_0, le nombre $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ est un entier relatif. On l'appelle *indice* de γ par rapport à z_0 et on le note $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$.

• Soient $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ et $\gamma_2 : [a,b] \longrightarrow U$ deux chemins C^1 par morceaux tels que l'origine de γ_2 soit égale à l'extrémité de γ_1. On peut définir un chemin *produit* de γ_1 et γ_2 noté $\gamma_1\gamma_2$ par :

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t-a) & \text{si } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ \gamma_2(2t-b) & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

Soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans U ayant même origine z_0 et même extrémité z_1.

Question : *Quel lien y a-t-il entre les deux intégrales* $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ *et* $\int_{\gamma_2} f(z)dz$?

Évidemment $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ si, et seulement si, $\int_{\gamma_1\gamma_2^{-1}} f(z)dz = 0$. Le problème de l'indépendance de l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ par rapport au chemin γ lorsqu'on prescrit l'origine et l'extrémité se pose donc. Dans cette direction on a la :

2.2. Proposition. *Soient $P, Q : U \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues. Alors les deux intégrales $\int_{\gamma_1}\{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$ et $\int_{\gamma_2}\{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}$ sont égales pour tout couple de chemins γ_1 et γ_2 ayant même origine z_0 et même extrémité z_1 si, et seulement si, il existe une fonction $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que :*

$$\frac{\partial h}{\partial x} = P \text{ et } \frac{\partial h}{\partial y} = Q.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial h}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = Q$. Soient z_0 et z_1 deux points de U et γ_1 et γ_2 deux chemins ayant même origine z_0 et même extrémité z_1. On va montrer que :

$$\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = 0$$

où γ est le lacet $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ de base z_0. On a :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} &= \int_\gamma \left\{\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy\right\} \\
&= \int_\gamma \left\{\frac{\partial h}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial h}{\partial y}y'(t)\right\} dt \\
&= \int_\gamma \frac{d}{dt}(h\circ\gamma)(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}(h\circ\gamma)(t)dt + \int_b^a \frac{d}{dt}(h\circ\gamma)(t)dt \\
&= (h(\gamma_1(b)) - h(\gamma_1(a)) + (h(\gamma_2(a)) - h(\gamma_2(b)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que, pour deux chemins γ_1 et γ_2 ayant même origine et même extrémité, on ait :

$$\int_{\gamma_1} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{\gamma_2} \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}.$$

On choisit un point base $z_0 = x_0 + iy_0$ dans U. Pour tout $z = x + iy \in U$, soit γ n'importe quel chemin d'origine z_0 et d'extrémité z ; on pose :

$$h(z) = \int_\gamma \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\} = \int_{z_0}^z \{P(x,y)dx + Q(x,y)dy\}.$$

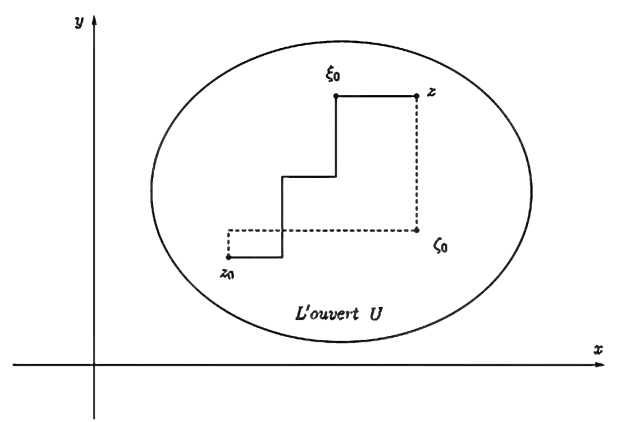
Cette quantité ne dépend pas du chemin qui joint z_0 à z ; on a donc une fonction bien définie. Si γ est une ligne polygonale dont le dernier segment $[\xi_0, z]$ (avec $\xi_0 = (t_0, y)$) est horizontal (*cf.* dessin ci-dessous), alors sur celui-ci y est constante et donc $dy = 0$; par suite l'intégrale s'écrit :

$$h(z) = \int_{t_0}^x P(t,y)dt + \text{constante}.$$

En dérivant par rapport à la première variable, on trouve $\frac{\partial h}{\partial x}(z) = P(z)$. En prenant cette fois-ci γ une ligne polygonale dont le dernier segment $[\zeta_0, z]$ (avec $\xi_0 = (x, s_0)$) est vertical, alors sur celui-ci x est constante et donc $dx = 0$; par suite l'intégrale s'écrit :

$$h(z) = \int_{s_0}^y Q(x,s)ds + \text{constante}.$$

En dérivant par rapport à la deuxième variable, on trouve $\frac{\partial h}{\partial y}(z) = Q(z)$. Ce qui démontre la proposition. □



2.3. Dans le cas où il existe une fonction $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\frac{\partial h}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = Q$ on dira que la *forme différentielle* $\omega = Pdx + Qdy$ est *exacte i.e.* $dh = \omega$; cela signifie que ω est la différentielle de la fonction h ; h est alors une *primitive* de ω ; toute autre primitive est de la forme $h +$ constante.

On dira qu'une forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$, avec cette fois-ci P et Q de classe C^1, est *fermée* si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Comme $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$ (théorème de Schwarz pour une fonction de classe C^2), une forme différentielle exacte est toujours fermée ; la réciproque n'est pas vraie comme on peut le voir sur la 1-forme $\omega = \frac{dz}{z}$ définie sur $\mathbb{C}^*$.

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est holomorphe, la forme différentielle $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$ est fermée. Cela découle du fait que $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

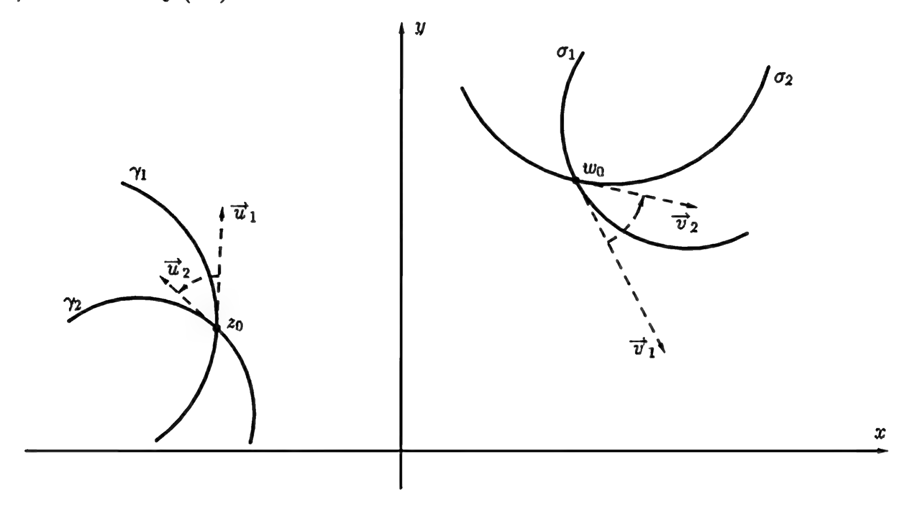
Dans le même ordre d'idées on peut se poser la question quand une forme différentielle complexe $f(z)dz$ ($f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ étant continue) est-elle exacte *i.e.* existe-t-il une fonction $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $dh = fdz$? La réponse est bien entendu donnée aussi par la proposition 2.2. En écrivant $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$, une telle fonction h, si elle existe, doit satisfaire $\frac{\partial h}{\partial x} = f$ et $\frac{\partial h}{\partial y} = if$ et donc $\frac{\partial h}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial y} = 0$; par suite h doit être holomorphe.

Conclusion : *f admet une primitive si, et seulement si, pour tout lacet γ dans U et C^1 par morceaux, l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ est nulle.*

EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

Soient $\gamma_1, \gamma_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{C}$ deux courbes paramétrées de classe C^1 se coupant au point $z_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Soit f une fonction holomorphe définie sur un ouvert Ω contenant les images de γ_1 et γ_2 et telle que $f'(z_0) \neq 0$. On note $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ les vecteurs tangents en z_0 respetivement à γ_1 et γ_2, $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$ ceux tangents respectivement aux courbes $\sigma_1 = f \circ \gamma_1$ et $\sigma_2 = f \circ \gamma_2$ en $w_0 = f(z_0)$.



Montrer que les angles algébriques $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ et $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ sont égaux. On dit que f *préserve les angles* ou que c'est une *transformation conforme*.

Solution

Regardons f comme une fonction de deux variables réelles (x, y) et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, on peut l'écrire $f(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y))$ où α et β sont des fonctions à valeurs réelles de classe C^∞. La diférentielle de f au point $z_0 = (x_0, y_0)$ a pour matrice jacobienne :

$$df_{z_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \alpha}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \beta}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \beta}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}.$$

Comme f est holomorphe, elle vérifie des conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \beta}{\partial x}(z_0).$$

Posons $a = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(z_0)$ et $b = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \beta}{\partial x}(z_0)$. D'où :

$$df_{z_0} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice d'une similitude linéaire directe de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Il bien connu qu'une telle transformation préserve les angles. Comme $\overrightarrow{v}_1 = df_{z_0}(\overrightarrow{u}_1)$ et $\overrightarrow{v}_2 = df_{z_0}(\overrightarrow{u}_2)$, on a bien entendu $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$. □

Exercice 2

On considère la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

1 - Montrer que f a pour rayon de convergence $R = 1$.

2 - Montrer qu'il existe un ensemble dense Σ dans le cercle unité $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ tel que la série diverge en n'importe lequel de ses points. (*Indication* : Remarquer que formellement $f(z) = z^2 + f(z^2)$.)

Solution

1 - Soient r un réel tel que $0 \leq r < 1$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq r$. On a :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z^{2^n}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n < +\infty.$$

Pour $|z| > 1$, le nombre réel $|z^{2^n}|$ tend vers $+\infty$ et donc la série $f(z)$ diverge. Par conséquent le rayon de convergence de la série f est $R = 1$.

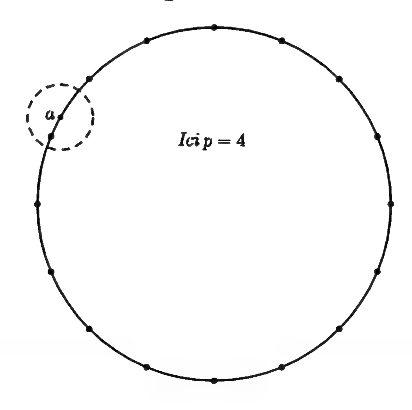
2 - Soit $z \in \mathbb{C}$. On a formellement (c'est-à-dire sans nous occuper du problème de convergence), pour tout entier $p \geq 1$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n} = z^2 + f(z^2) = \cdots = z^2 + \cdots + z^{2^p} + f(z^{2^p}).$$

Comme la série $f(z)$ diverge pour $z = 1$, elle va diverger en tout point z tel que $z^{2^p} = 1$. L'ensemble cherché est donc :

$$\Sigma = \bigcup_{p \geq 1} \{a_0, \cdots, a_{2^p-1}\}$$

où les $a_0, \cdots, a_{2^p-1}$ sont les racines $(2^p)^{\text{èmes}}$ de l'unité. Montrons que Σ est dense dans le cercle Γ. À cet effet, soient $a \in \Gamma$ et $\varepsilon > 0$. Alors a appartient à un arc d'extrémités deux racines $(2^p)^{\text{èmes}}$ successives a_k et a_{k+1}. La distance de a à la plus proche de ces deux extrémités, disons a_k est inférieure à la moitié de la longueur de l'arc, c'est-à-dire $\frac{2\pi}{2^{p+1}}$. Il suffit alors de choisir p de telle sorte que $\frac{2\pi}{2^{p+1}} < \varepsilon$. On a donc $|a - a_k| < \varepsilon$ avec $a_k \in \Sigma$.



La fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ est donc holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ mais ne peut se prolonger à aucun ouvert de $\mathbb{C}$ contenant strictement $\mathbb{D}$. On dit que $\mathbb{D}$ est le *domaine d'holomorphie* de f.

Exercice 3

Soient $z_0 = x_0 + iy_0$ un point de $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ et f la fonction $f(z) = (z - z_0)^n$. Soit a un réel strictement positif. On pose :

$$z_1 = (x_0 - a) + i(y_0 - a), \qquad z_2 = (x_0 + a) + i(y_0 - a)$$
$$z_3 = (x_0 + a) + i(y_0 + a), \qquad z_4 = (x_0 - a) + i(y_0 + a)$$

et on note γ la courbe bord du carré $z_1z_2z_3z_4$ orientée positivement *i.e.* les sommets sont dans l'ordre z_1, z_2, z_3, z_4. Calculer de deux manières différentes l'intégrale :

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

Solution

Pour calculer l'intégrale, on fait un changement de variable en posant $w = z - z_0$. Tout sera alors translaté autour de l'origine : on aura à calculer l'intégrale de w^n sur le bord σ du carré dont les sommets sont $w_1 = a(-1-i)$, $w_2 = a(1-i)$, $w_3 = a(1+i)$ et $w_4 = a(-1+i)$ parcouru dans le sens $w_1w_2w_3w_4$.

Première méthode

Elle consiste à paramétrer σ et à faire directement le calcul de l'intégrale sur les quatre côtés du carré. On a :

$$\int_\sigma w^n dw = \int_{-a}^{a} (x - ia)^n dx + \int_{-a}^{a} (a + iy)^n idy + \int_{a}^{-a} (x + ia)^n dx + \int_{a}^{-a} (-a + iy)^n idy.$$

Pour $n \neq -1$, on a :

$$\int_\sigma w^n dw = \frac{1}{n+1} \left[(t - ia)^{n+1} + (a + it)^{n+1} - (t + ia)^{n+1} - (-a + it)^{n+1}\right]_{-a}^{a} = 0.$$

Si $n = -1$, on a :

$$\int_\sigma \frac{dw}{w} = \int_{-a}^{a} \frac{1}{x - ia} dx + \int_{-a}^{a} \frac{1}{a + iy} idy + \int_{a}^{-a} \frac{1}{x + ia} dx + \int_{a}^{-a} \frac{1}{-a + iy} idy$$

qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \frac{dw}{w} &= \int_{-a}^{a} \left(\frac{1}{t - ia} - \frac{1}{t + ia}\right) dt + i \int_{-a}^{a} \left(\frac{1}{a + it} + \frac{1}{a - it}\right) dt \\
&= 4ia \int_{-a}^{+a} \frac{dt}{t^2 + a^2} \\
&= 4i \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\left(\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1\right)} \left(\frac{dt}{a}\right) \quad \text{(et en posant } u = \tfrac{t}{a}\text{)} \\
&= 4i \int_{-1}^{+1} \frac{du}{u^2 + 1} \\
&= 4i \left[\text{Arctg}(u)\right]_{-1}^{+1} \\
&= 2i\pi.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode

Sur $\mathbb{C}$ on considère la norme $||z|| = ||x+iy|| = \max(x,y)$. Le chemin σ peut alors être paramétré par $\sigma(t) = a||e^{2i\pi}||e^{2i\pi}$ (avec $t \in [0,1]$) de façon différentiable par morceaux (il est conseillé de regarder de près, c'est assez instructif). Ainsi σ est homotope au chemin fermé $\eta : t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi t}$ par l'application (clairement continue) $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ donnée par $H(t,s) = (1-s)\sigma(t) + s\eta(t)$. Par suite :

$$\int_\sigma w^n dw = \int_\eta w^n dw = 2i\pi \int_0^1 e^{2i\pi(n+1)t}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

Exercice 4

On note z_0 et z_1 respectivement les points 0 et $1+i$. Soit γ une courbe d'origine z_0 et d'extrémité z_1. Calculer la valeur de l'intégrale $\int_\gamma \overline{z}dz$ lorsque γ est :

1 - le segment qui joint z_0 et z_1 ;

2 - la portion de parabole d'équation $y = x^2$ qui joint z_0 et z_1 ;

3 - Conclusion ?

Solution

On pose $f(z) = \overline{z}$. Alors l'intégrale de f le long de γ vaut $\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

1 - La courbe γ a pour paramétrage $\gamma(t) = t+it$, et donc $\gamma'(t) = 1+i$. D'où :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 (t-it)(1+i)dt = \int_0^1 (1-i)(1+i)tdt = 2\int_0^1 tdt = 1.$$

2 - Cette fois-ci, γ a pour paramétrage $\gamma(t) = t+it^2$ et donc $\gamma'(t) = 1+2it$. Ce qui donne :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 (t-it^2)(1+2it)dt = \int_0^1 (2t^3+it^2+t)dt = \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{i}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 1 + \frac{i}{3}.$$

3 - L'intégrale de la fonction f dépend du chemin choisi pour aller de z_0 à z_1. Elle n'en dépendrait pas si f était holomorphe, ce qui n'est pas le cas pour $f(z) = \overline{z}$.

Exercice 5

Soient f la fonction $f(z) = z^2 + |z|^2$ et γ le demi-cercle $\{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Calculer l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$.

Solution

Comme on le voit dans l'énoncé, la courbe γ est paramétrée sur $[0,\pi]$ par $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ qui a pour dérivée $\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$. D'où :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^\pi i\left(e^{3i\theta} + e^{i\theta}\right)d\theta = \left[\frac{e^{3i\theta}}{3} + e^{i\theta}\right]_0^\pi = -\frac{8}{3}.$$

CHAPITRE IV
FORMULE ET THÉORÈME DE CAUCHY

1. Homotopie

On se donne un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (donc connexe par arcs). On rappelle qu'un chemin dans U d'origine z_0 et d'extrémité z_1 est une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Le chemin est dit *fermé* si $z_0 = z_1$. Si $\gamma(t) = z_0$ pour tout $t \in [0,1]$ on dira que le chemin γ est *constant*.

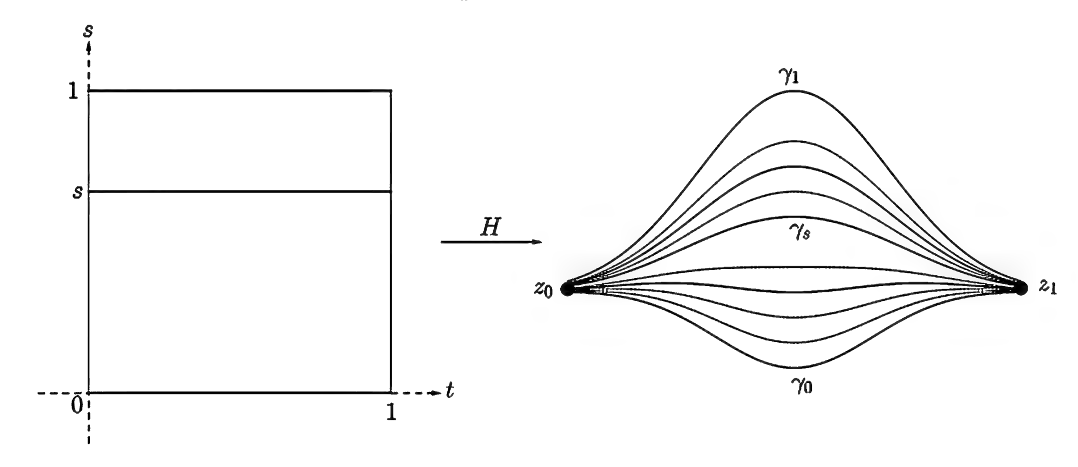
On note $C([0,1], U)$ l'ensemble de tous les chemins dans U qu'on munit de la topologie associée à la distance $d(\gamma, \sigma) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\gamma(t) - \sigma(t)|$.

1.1. Définition. *On dira que deux chemins γ_0 et γ_1 sont* **homotopes** *s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$, appelée* **homotopie** *entre γ_0 et γ_1, telle que pour tout $t \in [0,1]$ on ait :*

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t) \\ H(1,t) = \gamma_1(t). \end{cases}$$

Cela signifie que le chemin γ_0 se déforme continûment et se meut dans U jusqu'à se superposer au chemin γ_1 : en effet, à l'instant $s = 0$, on est sur γ_0, à l'instant s, on est sur le chemin $\gamma_s(t) = H(s,t)$ et à l'instant $s = 1$ (au bout d'une heure !) on est sur γ_1. En d'autres termes, il existe un chemin dans l'espace métrique $(C([0,1], U), d)$ d'origine γ_0 et d'extrémité γ_1. Si deux chemins quelconques dans U sont toujours homotopes, l'espace métrique $(C([0,1], U), d)$ est connexe par arcs.

On dira que γ_0 et γ_1 sont *homotopes relativement à* $\{z_0, z_1\}$ s'il existe une homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$ telle que $H(s,0) = z_0$ et $H(s,1) = z_1$ pour tout $s \in [0,1]$; ceci force donc γ_0 et γ_1 à avoir la même origine et la même extrémité.



On ne considérera dans toute la suite que l'homotopie entre chemins ayant même origine et même extrémité. On a la proposition qui suit (la démonstration est laissée au lecteur).

1.2. Définition. *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $z_0, z_1 \in U$. On note $C(U; z_0, z_1)$ l'ensemble des chemins dans U joignant z_0 à z_1. On a les propriétés qui suivent.*

i) *Dans $C(U; z_0, z_1)$ la relation « être homotope à » est une relation d'équivalence.*

ii) *Si γ_0 et γ_1 sont homotopes dans $C(U; z_0, z_1)$, σ_0 et σ_1 sont homotopes dans $C(U; z_1, z_2)$ alors les composés $\gamma_0\sigma_0$ et $\gamma_1\sigma_1$ sont homotopes dans $C(U; z_0, z_2)$.*

1.3. Définition. *On dira que l'ouvert U est* **simplement connexe** *s'il est connexe et si tout chemin dedans est homotope à un chemin constant.*

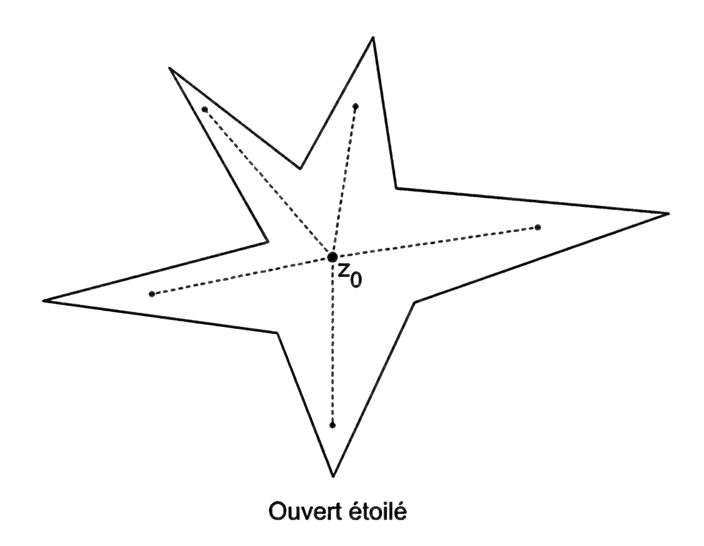
Cette notion est capitale. Elle est fortement utilisée lorsqu'on cherche à uniformiser des fonctions qui a priori sont multiformes telles la fonction logarithme complexe, les fonctions $z^{\frac{1}{n}}$ *etc.* Nous allons donner quelques exemples d'ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ et d'ouverts qui ne le sont pas.

1.4. Exemples

• Le plan complexe $\mathbb{C}$ lui-même, le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ sont simplement connexes.

• De façon générale, tout ouvert U convexe est simplement connexe. En effet, soient γ_0 et γ_1 deux chemins quelconques dans U. Alors l'application $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$ définie par $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$ est une homotopie entre γ_0 et γ_1. En particulier, tout lacet est homotope à un chemin constant.

• On dira que U est *étoilé* par rapport au point z_0 si, pour tout $z_1 \in U$, le segment $[z_0z_1] = \{(1-s)z_0 + sz_1 : 0 \leq s \leq 1\}$ est contenu dans U. Un tel ouvert est simplement connexe. Par exemple, $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite fermée est un ouvert simplement connexe car il est étoilé par rapport à tout point dans le prolongement de cette demi-droite qui la complète en droite.



Ouvert étoilé

• Par contre $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe. De même, $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini (ou dénombrable) de points n'est pas simplement connexe. Une couronne n'est pas simplement connexe.

Les exemples sont assez nombreux. Nous laissons le lecteur libre à son imagination d'en fabriquer comme bon lui semble.

• La simple connexité est une notion topologique : tout ouvert homéomorphe à un ouvert simplement connexe est simplement connexe.

2. Théorème de Cauchy

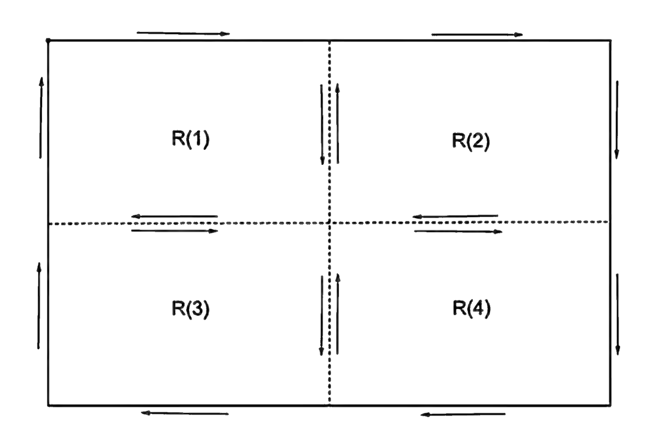
Il admet diverses versions qui sont fondamentalement les mêmes ; elles diffèrent simplement au niveau de leurs formulations et la nature topologique de l'ouvert sur lequel la fonction est holomorphe. Nous commencerons par le cas d'un rectangle.

2.1. Théorème de Cauchy 1. *Soient U un ouvert connexe, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et R un rectangle contenu dans U. Alors :*

$$I(f, \partial R) = \int_{\partial R} f(z)dz = 0. \qquad \text{(IV.1)}$$

où ∂R désigne le bord du rectangle R.

Démonstration. Pour simplifier, la quantité $I(f, \partial R)$ sera notée $I(R)$. On divise le rectangle R en quatre rectangles $R(1), R(2), R(3), R(4)$ comme sur la figure qui suit.



On a alors $I(R) = I(R(1)) + I(R(2)) + I(R(3)) + I(R(4))$. (L'intégrale de f sur chacun des côtés intérieurs se répète sur le même côté avec l'orientation opposée, donc la somme des deux donne 0.) Si on avait $|I(R(j))| < \frac{|I(R)|}{4}$ pour tout $j = 1, 2, 3, 4$ on aurait :

$$|I(R)| \leq |I(R(1))| + |I(R(2))| + |I(R(3))| + |I(R(4))| < |I(R)|,$$

ce qui est absurde ; donc l'un au moins des rectangles $R(j)$ est tel que $|I(R(j))| \geq \frac{|I(R)|}{4}$; notons-le R_1. On refait la même chose avec R_1 ; on obtient un nouveau rectangle $R_2 \subset R_1$ tel que $I(R_2) \geq \frac{|I(R_1)|}{4} \geq \frac{|I(R)|}{4^2}$. De cette manière on construit une suite de rectangles $(R_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \cdots \quad \text{et} \quad |I(R_n)| \geq \frac{|I(R)|}{4^n}. \qquad \text{(IV.2)}$$

L'intersection des rectangles de la suite décroissante (R_n) (compacts dont le diamètre tend vers 0) est un point $w \in R$. Comme f est holomorphe en w, $f'(w)$ existe et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|z-w| < \eta \Longrightarrow \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(w)\right| < \varepsilon$$

ou encore :

$$|z-w| < \eta \Longrightarrow |(f(z)-f(w)) - (z-w)f'(w)| < |z-w|\varepsilon.$$

Comme l'intégrale de toute fonction constante et celle de z sont nulles sur R_n (calcul facile à mener), on a :

$$I(R_n) = \int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n} \{(f(z)-f(w)-(z-w)f'(w)\}dz$$

et donc :

$$|I(R_n)| = \left|\int_{\partial R_n} \{(f(z)-f(w)-(z-w)f'(w)\}dz\right| < \varepsilon \int_{\partial R_n} |z-w||dz|$$

lorsque $|z-w| < \eta$. Ici $|dz|$ désigne la variation infinitésimale du module de z. Soient d_n et L_n les mesures respectivement de la diagonale et du périmètre de R_n, d et L celles de R. Alors $|I(R_n)| \leq \frac{\varepsilon dL}{4^n}$ ce qui donne finalement (en utilisant (IV.2)) $|I(R)| \leq dL\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, la quantité $I(R)$ doit être nulle. □

Les hypothèses peuvent être affaiblies et donner en plus une version un peu plus forte permettant d'établir d'autres résultats importants. On se contentera de son énoncé.

2.2. Théorème de Cauchy 2. *Soit Ω un ouvert obtenu à partir d'un rectangle R (comme dans le théorème 2.1) en lui ôtant un nombre fini de points $z_1, \cdots, z_k$. On suppose que, pour tout $j = 1, \cdots, k$, on a $\lim_{z \to z_j} (z-z_j)f(z) = 0$. Alors :*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Et encore une version un peu plus générale. (Cette fois-ci l'hypothèse est affaiblie en généralisant le chemin sur lequel on intègre.)

2.3. Théorème de Cauchy 3. *Soit f une fonction holomorphe sur un disque sauf en un nombre fini de points (de ce disque) $z_1, \cdots, z_k$. On suppose que, pour tout $j = 1, \cdots, k$, on a $\lim_{z \to z_j} (z-z_j)f(z) = 0$. Alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour toute courbe fermée γ, C^1 par morceaux et ne passant par aucun des points $z_1, \cdots, z_k$.*

La forme la plus générale du théorème de Cauchy est donnée par l'énoncé qui suit. Il est basé essentiellement sur la nature homotopique du chemin sur lequel on intègre.

2.4. Théorème de Cauchy. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U. Alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0. \tag{IV.3}$$

pour tout chemin fermé γ homotope à un point.

On sait, par définition même que, dans un ouvert simplement connexe, tout chemin fermé est homotope à un point. On obtient alors le :

2.5. Corollaire. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe U. Alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

pour tout chemin fermé γ dans U. La fonction f y admet alors une primitive i.e. il existe une fonction holomorphe $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in U$ donnée par :

$$F(z) = \int_\sigma f(\xi)d\xi \tag{IV.4}$$

où σ est n'importe quel chemin joignant un point fixé z_0 au point z.

L'hypothèse « U simplement connexe » est substantielle pour la définition de la fonction F par la formule (IV.4) car autrement F ne serait qu'une fonction multiforme.

3. Formule de Cauchy

C'est un bijou de la théorie des fonctions holomorphes. On va voir effectivement que cette formule y joue un rôle central : elle permet, entre autres, de montrer l'analyticité d'une fonction holomorphe et donc des propriétés importantes sur la nature de ses zéros et ses singularités.

3.1. Indice d'un chemin fermé

Nous avons déjà introduit cette notion pour un cercle. Nous allons donner la définition pour n'importe quel chemin fermé.

Soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux dans $\mathbb{C}$ et z_0 un point de $\mathbb{C}\backslash\gamma$. Alors l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ est de la forme $2i\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Quite à découper le chemin γ en plusieurs morceaux, on peut se ramener à la situation où γ est C^1 partout. On a donc un paramétrage continûment différentiable $\gamma : t \in [0,1] \longmapsto \gamma(t) \in \mathbb{C}$. Soit $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}ds.$$

Elle est de classe C^1 et a pour dérivée $\psi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$. La dérivée de $e^{-\psi(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est alors identiquement nulle ; par suite cette fonction est constante et est donc égale à sa valeur en 0 *i.e.* $e^{-\psi(t)}(\gamma(t) - z_0) = \gamma(0) - z_0$ ou $e^{\psi(t)} = \frac{\gamma(t)-z_0}{\gamma(0)-z_0}$. Comme $\gamma(1) = \gamma(0)$ (le

chemin γ étant fermé) $e^{\psi(1)} = 1$ et donc $\psi(1) = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt$ doit être de la forme $2i\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Ce qui démontre l'énoncé. □

L'entier :

(IV.5)
$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

est appelé l'*indice* du chemin fermé γ relativement au point z_0. Donnons quelques-unes de ses propriétés.

Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé C^1 par morceaux. Comme l'application γ est continue son image est un compact. Ce compact partage le plan en des ouverts : les composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\gamma$. Une et une seule de ces composantes est non bornée ; notons-la Ω_∞.

• On a $\mathrm{Ind}(\gamma^{-1}, z_0) = -\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ où γ^{-1} est l'opposé de γ *i.e.* le chemin défini par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

• Comme fonction de z_0, $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)$ est constant sur chacune des composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\gamma$. Pour $z_0 \in \Omega_\infty$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = 0$.

3.2. Formule intégrale de Cauchy. *Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un disque U et $z_0 \in U\backslash\gamma$ où γ est un chemin fermé dans U. Alors :*

(IV.6)
$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Démonstration. Pour $z \in U$ on pose $\Phi(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Cette quantité est définie partout sauf pour $z = z_0$. La fonction Φ est holomorphe sur $U\backslash\{z_0\}$ et vérifie :

$$\lim_{z\to z_0}((z-z_0)\Phi(z)) = \lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0)) = 0.$$

D'après le Théorème 2.3 on a :

$$\int_\gamma \Phi(z)dz = \int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0$$

qu'on peut écrire aussi $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz$. Mais $\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = 2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)f(z_0)$. Ce qui donne :

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

qui est la formule qu'on cherche à établir. □

La formule de Cauchy habituellement utilisée est celle dans laquelle le chemin γ est d'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = 1$. Et en fait on la voit comme une fonction de $\zeta \in U\backslash\gamma$; dans cette situation elle s'écrit :

(IV.7)
$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}dz.$$

L'énoncé 3.2 est donné pour un disque alors qu'en réalité la formule intégrale de Cauchy est valable sur n'importe quel ouvert connexe. Voici la version générale :

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U \backslash \gamma$ où γ est un chemin fermé dans U homotope à un point. Alors :

(IV.8) $$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

4. Analyticité des fonctions holomorphes

Nous avons déjà vu qu'une fonction analytique sur un ouvert y est holomorphe. L'objet de cette section est de montrer que la réciproque est vraie et de donner quelques propriétés en plus.

4.1. Théorème. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U. Alors elle y est analytique.*

Démonstration. Soient $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans U. Notons γ le cercle de centre z_0 et de rayon r. Alors, pour $z \in D(z_0, r)$, on a :

(IV.9) $$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad \text{(Formule de Cauchy).}$$

De façon évidente, $|z - z_0| < |\xi - z_0|$ pour tout ξ sur le cercle γ et tout z dans le disque ouvert $D(z_0, r)$. Par suite on a un développement en série convergente :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right) + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n + \cdots \right\} \end{aligned}$$

En injectant dans (IV.9) on obtient :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right) d\xi.$$

Comme on intègre sur le compact γ et que la série y converge uniformément, on peut permuter les signes de sommation et d'intégration pour obtenir :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n$$

qui montre bien que, sur le disque ouvert $D(z_0, r)$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ avec :

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

c'est-à-dire f est analytique. □

La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ est appelée *série de Taylor* de f au voisinage de z_0. Si $f_0 = 0$, alors z_0 est un *zéro* de f. Le plus petit entier naturel $n \geq 1$ tel que $f_n \neq 0$ est appelé *multiplicité* du zéro z_0.

Une estimation de la taille des coefficients f_n est décrite par la proposition qui suit.

4.2. Inégalités de Cauchy. *Supposons f holomorphe sur le disque $D(z_0, r)$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $\sup_{z \in D(z_0, r)} |f(z)| \leq M$. Alors les coefficients de sa série de Taylor au voisinage de z_0 vérifient l'inégalité :*

(IV.10). $$|f_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Démonstration. On sait, d'après ce qui précède, que le coefficient f_n est donné par la formule intégrale :

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où γ_ρ est le cercle de centre z_0 et de rayon ρ avec $0 < \rho < r$. D'où :

$$\begin{aligned} |f_n| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \cdot |d\xi| \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}} \\ &= \frac{M}{\rho^n}. \end{aligned}$$

En prenant la limite pour ρ tendant vers r on obtient l'inégalité cherchée. □

Un corollaire presque immédiat des inégalités de Cauchy est le :

4.3. Théorème de Liouville. *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (on dit que f est une fonction* **entière***). On suppose que f est bornée i.e. il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors f est constante.*

Démonstration. La fonction f admet au voisinage de 0 un développement de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ convergeant sur tout disque $D(0, r)$. Comme f est bornée par $M > 0$, pour tout $r > 0$ on a $|f_n| \leq \frac{M}{r^n}$ pour tout n. On fait tendre r vers $+\infty$; ce qui nous donne $f_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc f est constante égale à f_0. □

Nous terminons cette section par le théorème suivant (que nous ne démontrerons pas).

4.4. Principe du maximum. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante sur un ouvert connexe U. Alors il n'existe aucun point $z_0 \in U$ en lequel le module $|f|$ de f soit maximal. De façon précise, il n'existe pas de point $z_0 \in U$ tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tout $z \in U$.*

Ce théorème admet de façon presque immédiate le :

4.5. Corollaire. *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante sur un ouvert connexe borné U et continue sur son adhérence $\overline{U}$. Alors $|f|$ ne peut atteindre son maximum que sur le bord $\partial U = \overline{U} \backslash U$ de U.*

On peut dire aussi que si $|f|$ atteint son maximum sur U alors f est constante.

EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{a\}$ un chemin fermé. On rappelle que l'*indice* de γ par rapport au point a est le nombre entier : $I(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$. On peut le calculer par exemple comme suit. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $e^{f(t)} = \gamma(t) - a$. Alors $I(\gamma, a) = \frac{f(1)-f(0)}{2i\pi}$ (*cf.* sous-section 3.1).

1 - Soient $R > 0$, f une application continue sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ et γ sa restriction au cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Soit a un point qui n'est pas sur l'image de γ et tel que $I(\gamma, a) \neq 0$. Montrer que f prend au moins une fois la valeur a sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

2 - Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins fermés dans $\mathbb{C}^*$. Pour tout $\in [0,1]$, on pose $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$; on définit ainsi un chemin fermé $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ qu'on appelle *produit* de γ_1 et γ_2. Montrer que $I(\gamma, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$.

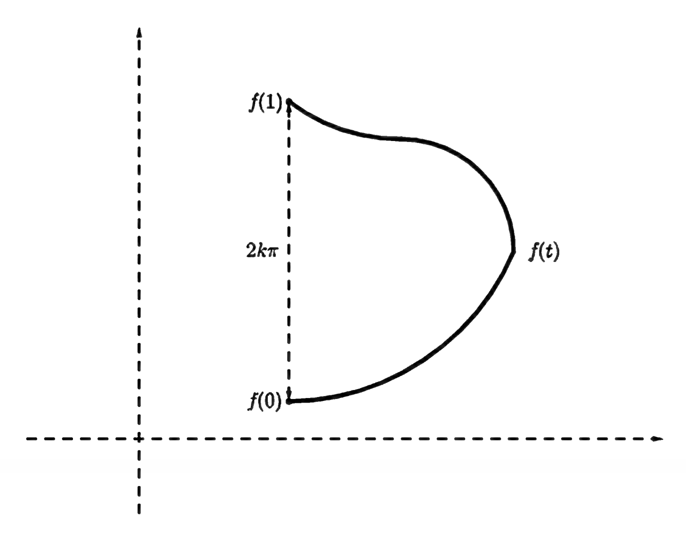
3 - Soient $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ et $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tels que $|\gamma_1(t)| < |\gamma(t)|$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que le chemin $\gamma + \gamma_1$ ne prend jamais la valeur 0 et qu'on a $I(\gamma + \gamma_1, 0) = I(\gamma, 0)$.

Solution

1 - Pour tout $r \in [0, R]$ notons γ_r l'image par f du cercle centré en 0 et de rayon r ; on a bien sûr $\gamma_R = \gamma$. La famille $f(sz)$ indexée par $s \in [0,1]$ est une homotopie entre γ et le lacet constant $\gamma_0(t) = f(0)$.

Supposons qu'il n'existe aucun z avec $|z| < R$ tel que $a = f(z)$. Cela signifie que a n'est sur aucun des chemins fermés γ_r. Donc $I(\gamma, a) = I(\gamma_0, a) = 0$; ce qui contredit le fait que $I(\gamma, a) \neq 0$.

2 - Pour un chemin fermé γ dans $\mathbb{C}^*$, il existe une fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $e^{f(t)} = \gamma(t)$. L'image d'une telle fonction est du type celle représentée par la courbe ci-dessous : les points $f(0)$ et $f(1)$ ont même abscisse et leurs ordonnées diffèrent d'un multiple entier de 2π.



Soient f_1 et f_2 de telles fonctions telles que $e^{f_1(t)} = \gamma_1(t)$ et $e^{f_2(t)} = \gamma_2(t)$. Il est alors clair que la fonction $f = f_1 + f_2$ vérifie $e^{f(t)} = \gamma(t)$. D'où :

$$I(\gamma, 0) = \frac{f(1) - f(0)}{2i\pi} = \frac{f_1(1) - f_1(0)}{2i\pi} + \frac{f_2(1) - f_2(0)}{2i\pi} = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0).$$

3 - Comme $|\gamma_1(t) < |\gamma(t)|$ on a $\frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)} < 1$ et par suite le chemin $\sigma(t) = 1 + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}$ est contenu dans le disque ouvert de centre le point 1 et de rayon 1 ; il a donc pour indice par rapport à l'origine $I(\sigma, 0) = 0$. D'où, d'après la question précédente :

$$I(\gamma + \gamma_1, 0) = I\left(\gamma\left(1 + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}\right)\right) = I(\gamma \cdot \sigma) = I(\gamma, 0) + I(\sigma, 0) = I(\gamma, 0).$$

Exercice 2

Le théorème de Liouville dit qu'une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante. L'objet de cet exercice est de montrer l'existence d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ non constante et dont la restriction à toute droite réelle passant par l'origine est bornée.

1 - Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel $r \geq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{tr}}{t^{t-n}} dt$ est convergente.

2 - Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{tz}}{t^t} dt$ est bien définie et qu'elle n'est pas constante.

3 - Soient $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour $r \geq 0$, on pose $\delta_p(r) = e^r - \sum_{n=0}^{p} \frac{r^n}{n!}$. Montrer que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \geq p+1} \frac{z^n t^n}{n! t^t}\right) dt$$

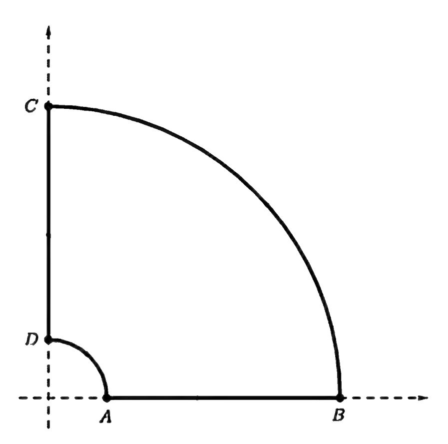
existe et que, pour $|z| \leq R$ et tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'inégalité :

$$\left|\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \geq p+1} \frac{z^n t^n}{n! t^t}\right) dt\right| \leq \left(\delta_p(Rs) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^t}\right) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{tR}}{t^t} dt.$$

4 - En déduire que f est une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier). Donner les coefficients de son développement de Taylor à l'origine.

5 - On note U l'ouvert $\mathbb{C} \backslash \{x + iy : y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$ et φ la détermination principale du logarithme sur U, c'est-à-dire la fonction $\varphi(z) = \ln(|z|) + i\text{Arg(z)}$ où $\text{Arg(z)} \in]-\pi, \pi[$ est l'argument de z. On étend la fonction t^t (définie jusqu'à présent pour $t \in \mathbb{R}_+^*$) à l'ouvert U en posant $t^t = e^{t\varphi(t)}$.

Pour $0 < \varepsilon < R$ on considère les points $A = \varepsilon$, $B = R$, $C = iR$ et $D = i\varepsilon$. On note Γ_A, l'arc AB, γ_B l'arc BC, γ_C l'arc CD, γ_D l'arc DA et Γ le chemin orienté fermé $ABCDA$ qu'ils composent (représenté dans le dessin ci-dessous).



Calculer l'intégrale $\int_\Gamma \frac{e^{zt}}{t^t}dt$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

6 - Pour $t \in U$ on l'écrit $t = re^{i\theta}$ et on suppose que $z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + K\right)$ avec $K > 0$. Calculer $\left|\frac{e^{zt}}{t^t}\right|$ en fonction de r, θ, K et x.

7 - On prend toujours $z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + K\right)$ avec $K > 0$. On supposera aussi $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
i) Montrer que si $R > e^{x+K}$ alors $\left|\int_{\gamma_B} \frac{e^{zt}}{t^t}dt\right| \leq \frac{\pi}{2}Re^{-KR}$.

ii) Montrer que $\left|\int_{\gamma_C} \frac{e^{zt}}{t^t}dt\right| \leq \frac{1}{K}$.

iii) Montrer que $\left|\int_{\gamma_D} \frac{e^{zt}}{t^t}dt\right| \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon e^{\varepsilon|x|+\frac{1}{e}}$

8 - Déduire de tout ce qui précède que $|f(z)| \leq \frac{1}{K}$ pour $z = x+i\left(\frac{\pi}{2} + K\right)$ avec $K > 0$.

9 - Dire comment majorer $|f(z)|$ par $\frac{1}{K}$ pour $z = x-i\left(\frac{\pi}{2} + K\right)$ avec $K > 0$ et montrer qu'il existe des réels $B >$ et $M > 0$ tels que $|f(z)| \leq M$ si $|\Im(z)| \geq B$.

10 - Construire à l'aide de f une fonction entière $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, non constante et dont la restriction à toute droite réelle passant par 0 est bornée (en module).

Solution

1 - On découpe l'intervalle $]0, +\infty[$ comme suit $]0, +\infty[=]0, \alpha] \cup [\alpha, +\infty[$ avec $\alpha = e^{r+1}$ où $r \in \mathbb{R}^+$. Il suffit de montrer la convergence sur chacun de ces intervalles. Soit $n \in \mathbb{N}$.
i) Pour $t \geq e^{r+1}$, on a $\ln(t) \geq r + 1$ et par suite $t(r - \ln(t)) \leq -t$; ce qui implique $\frac{e^{rt}}{t^{t-n}} \leq e^{-t}t^n$. D'où :

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{e^{rt}}{t^{t-n}}dt \leq \int_\alpha^{+\infty} e^{-t}t^n dt < +\infty.$$

ii) Sur l'intervalle $]0, \alpha]$ la fonction $\sigma : t \longmapsto \frac{e^{rt}}{t^{t-n}}$ est continue. En remarquant que $\frac{e^{rt}}{t^{t-n}} = e^{t(r-\ln(t))}t^n$, on voit que :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{rt}}{t^{t-n}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

La fonction σ se prolonge donc en une fonction continue sur l'intervalle compact $[0, \alpha]$, par suite elle y est intégrable *i.e* l'intégrale $\int_0^\alpha \frac{e^{rt}}{t^{t-n}}dt$ est convergente.

2 - Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Alors, pour $t \geq 0$ on a $|e^{tz}| = |e^{t(x+iy)}| = |e^{tx}| \leq e^{t|z|}$. Écrivons $\frac{e^{t|z|}}{t^t}$ sous la forme $e^{-t(\ln(t)-|z|)}$. Il existe alors $t_0 > 0$ tel que $\ln(t) - |z| \geq 1$ pour $t \geq t_0$, donc $|e^{-t(\ln(t)-|z|)}| \leq e^{-t}$. Par suite $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{e^{t|z|}}{t^n} dt$ est convergente ; il en est alors de même pour $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{e^{tz}}{t^n} dt$. D'autre part, comme la fonction $t \longmapsto \frac{e^{t|z|}}{t^t}$ est continue sur l'intervalle $]0, t_0]$ et admet une limite $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{e^{t|z|}}{t^t} = 1$, elle est intégrable sur cet intervalle. Donc la fonction :

$$f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{tz}}{t^t} dt = \int_0^{t_0} \frac{e^{tz}}{t^t} dt + \int_{t_0}^{+\infty} \frac{e^{tz}}{t^t} dt$$

est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

La fonction f n'est pas constante car $f(1) - f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t^t} dt$ est une quantité strictement positive.

3 - Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $\frac{e^{tz}}{t^t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n z^n}{t^t n!}$. D'où :

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t^n z^n}{t^t n!} = \frac{e^{tz}}{t^t} - \frac{1}{t^t} \left(1 + \frac{tz}{1!} + \cdots + \frac{t^p z^p}{p!} \right).$$

Et donc :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t^n z^n}{t^t n!} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{tz}}{t^t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t} \left(1 + \frac{tz}{1!} + \cdots + \frac{t^p z^p}{p!} \right) dt$$

ce qui montre la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \geq p+1} \frac{z^n t^n}{n! t^t} \right) dt$.

Supposons maintenant $|z| \leq R$ et reprenons le réel $s > 0$ donné dans l'énoncé. On a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \geq p+1} \frac{z^n t^n}{n! t^t} \right) dt \right| &\leq \int_0^{s} \left(\sum_{n \geq p+1} \frac{|z^n t^n|}{n! t^t} \right) dt + \int_s^{+\infty} \left(\sum_{n \geq p+1} \frac{|z^n t^n|}{n! t^t} \right) dt \\
&\leq \int_0^{s} \frac{1}{t^t} \left(e^{Rt} - \sum_{n=0}^{p} \frac{R^n t^n}{n!} \right) dt + \int_s^{+\infty} \frac{1}{t^t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n t^n}{n!} \right) dt \\
&\leq \left(\delta_p(Rs) \int_0^{s} \frac{dt}{t^t} \right) + \int_s^{+\infty} \frac{e^{Rt}}{t^t} dt \\
&\leq \left(\delta_p(Rs) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^t} \right) + \int_s^{+\infty} \frac{e^{Rt}}{t^t} dt
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité cherchée.

4 - De l'inégalité :

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \geq p+1} \frac{z^n t^n}{n! t^t} \right) dt \right| \leq \left(\delta_p(Rs) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^t} \right) + \int_s^{+\infty} \frac{e^{Rt}}{t^t} dt$$

qu'on vient d'établir on déduit la convergence de la série :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\geq p+1}\frac{z^n t^n}{n!t^t}\right)dt=\sum_{n\geq p+1}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!t^t}dt\right)z^n$$

sur le disque de centre l'origine et de rayon tout $R>0$. Elle représente dans tout le plan complexe la fonction $f(z)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{tz}}{t^t}dt$ qui y est donc une fonction entière. Le coefficient a_n de son développement de Taylor est donné par la formule intégrale $a_n=\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!t^t}dt$.

5 - Le contour Γ est contenu dans l'ouvert U sur lequel la fonction $t\longmapsto\frac{e^{zt}}{t^t}=e^{t(z-\varphi(t))}$ est holomorphe. D'où :

$$\int_\Gamma\frac{e^{zt}}{t^t}dt=0.$$

6 - On a $\left|\frac{e^{zt}}{t^t}\right|=\exp\left\{r\cos\theta(x-\ln(r))+r\sin\theta(\theta-\frac{\pi}{2}-K)\right\}$.

7 i) - Occupons-nous de la quantité : $r\cos\theta(x-\ln(r))+r\sin\theta(\theta-\frac{\pi}{2}-K)$. On a (en utilisant le fait que $x-\ln(R)<-K$ car on a supposé $R>e^{x+K}$) :

$$\begin{aligned}r\cos\theta(x-\ln(r))+r\sin\theta\left(\theta-\frac{\pi}{2}-K\right)&\leq(x-\ln(r))R\cos\theta+\left(\theta-\frac{\pi}{2}-K\right)R\sin\theta\\&\leq-KR(\cos\theta+\sin\theta)+\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)R\sin\theta\\&\leq-KR(\cos\theta+\sin\theta)\ \ (\text{car } 0\leq\theta\leq\tfrac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Et comme $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ on a $\cos\theta+\sin\theta\geq1$ et donc $-KR(\cos\theta+\sin\theta)\leq-KR$. Par suite $r\cos\theta(x-\ln(r))+r\sin\theta\left(\theta-\frac{\pi}{2}-K\right)\leq-KR$. En prenant les exponentielles des deux membres et en intégrant par rapport à θ sur l'arc γ_B, nous obtenons finalement l'inégalité cherchée :

$$\left|\int_{\gamma_B}\frac{e^{zt}}{t^t}dt\right|\leq\frac{\pi}{2}Re^{-KR}.$$

7 ii) - L'arc γ_C est paramétré par $t=is$ avec $s\in[\varepsilon,R]$. On a $\frac{e^{zt}}{t^t}=e^{zt-t\varphi(t)}$; mais, sur l'arc γ_C, $zt-t\varphi(t)=is\left(x+i(\frac{\pi}{2}+K)\right)-is(\ln(s)+i\frac{\pi}{2})=-sK+is(x-\ln(s))$. Par suite $\left|\frac{e^{zt}}{t^t}\right|=e^{-sK}$. On a alors :

$$\left|\int_{\gamma_C}\frac{e^{zt}}{t^t}dt\right|\leq\int_{\gamma_C}\left|\frac{e^{zt}}{t^t}\right|dt=\int_\varepsilon^R e^{-Ks}ds\leq\int_0^{+\infty}e^{-Ks}ds=\frac{1}{K}.$$

7 iii) - L'arc γ_D est paramétré par $t=\varepsilon e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Comme précédemment on peut écrire $\frac{e^{zt}}{t^t}=e^{zt-t\varphi(t)}$. Un calcul élémentaire mais un peu long nous donne :

$$zt-t\varphi(t)=\varepsilon\left((x-\ln(\varepsilon))\cos\theta+\left(\theta-K-\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta\right)+i\beta$$

où β est un réel. On en déduit $\left|\frac{e^{zt}}{t^t}\right|=e^{(x-\ln(\varepsilon))\varepsilon\cos\theta+(\theta-K-\frac{\pi}{2})\varepsilon\sin\theta}$. On va majorer l'expression $(x-\ln(\varepsilon))\varepsilon\cos\theta+(\theta-K-\frac{\pi}{2})\varepsilon\sin\theta$ pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Comme $-\varepsilon\ln(\varepsilon)\leq\frac{1}{e}$ pour tout $\varepsilon>0$, $\cos\theta\leq1$ et $(\theta-\frac{\pi}{2}-K)\sin\theta<0$ pour $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ on a :

$$(x-\ln(\varepsilon))\varepsilon\cos\theta+\left(\theta-K-\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon\sin\theta\leq\varepsilon|x|+\frac{1}{e}.$$

À partir de là, on déduit facilement la majorationn cherchée :

$$\left|\int_{\gamma_D} \frac{e^{zt}}{t^t} dt\right| \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon e^{\varepsilon|x|+\frac{1}{\varepsilon}}.$$

8 - On a vu dans la question 5 que l'intégrale de la fonction $t \longmapsto \frac{e^{zt}}{t^t}$ sur le contour Γ est nulle. Mais Γ se compose des arcs Γ_A, Γ_B, Γ_C et Γ_D. Donc :

$$\int_{\Gamma_A} \frac{e^{zt}}{t^t} dt = -\left(\int_{\Gamma_B} \frac{e^{zt}}{t^t} dt + \int_{\Gamma_C} \frac{e^{zt}}{t^t} dt + \int_{\Gamma_D} \frac{e^{zt}}{t^t} dt\right).$$

On a donc, pour tout $R > 0$, tout ε tel que $0 < \varepsilon < R$ et tout nombre complexe de la forme $z = x + i(\frac{\pi}{2} + K)$ avec $K > 0$:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{zt}}{t^t} dt\right| \leq \frac{1}{K} + \frac{\pi}{2} R e^{-KR} + \frac{\pi}{2} \varepsilon e^{\varepsilon|x|+\frac{1}{\varepsilon}}$$

si $R > e^{x+K}$. Donc :

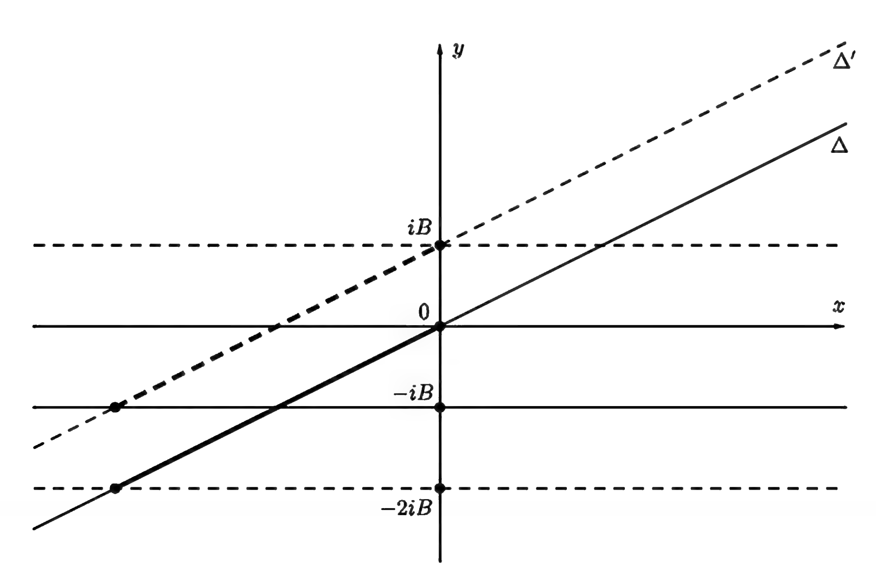
$$|f(z)| = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} \left|\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{zt}}{t^t} dt\right| \leq \frac{1}{K}.$$

9 - Pour majorer $|f(z)|$ pour $z = x - i(\frac{\pi}{2} + K)$ avec $K > 0$ il suffit de considérer le contour Γ' orienté, symétrique de Γ par rapport à l'axe réel et, dans la question 7, modifier légèrement les démonstrations pour obtenir les mêmes majorations que dans i), ii) et iii). On aura donc aussi l'inégalité $|f(z)| \leq \frac{1}{K}$ pour $z = x - i(\frac{\pi}{2} + K)$ avec $K > 0$.

Si on prend $B = \frac{\pi}{2} + K$ avec $K > 0$ et $M = \frac{1}{K}$ alors on a $|f(z)| \leq M$ pour tout z tel que $|\Im(z)| \geq B$.

10 - Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $g(z) = f(z + iB)$. Alors g est une fonction entière et non constante (puisque f vérifie ces deux propriétés).

Soient Δ une droite réelle passant par l'origine et Δ' sa translatée par le vecteur iB. Bien entendu, Δ' est parallèle à Δ et passe par le point iB.



Premier cas : Δ est l'axe réel.

Si $z \in \Delta$, on a $|\Im(z+iB)| = B$ et donc $|g(z)| = |f(z+iB)| \leq M$ d'après ce qui précède.

Deuxième cas : Δ n'est pas l'axe réel.

Soit $z \in \Delta$; alors $z + iB$ est sur la droite Δ'.

- Pour $\Im(z) \leq -2B$, on a $\Im(z+iB) \leq -B$ et donc $|g(z)| = |f(z+iB)| \leq M$.
- Pour $\Im(z) \geq 0$, on a $\Im(z+iB) \geq B$ et donc $|g(z)| = |f(z+iB)| \leq M$.
- Pour $-2B \leq \Im(z) \leq 0$, on a $-B \leq \Im(z+iB) \leq B$ *i.e.* $z+iB$ est sur le segment fermé $\Delta' \cap \{w : |\Im(w)| \leq B\}$; comme celui-ci est compact et que f et g sont continues, on y a $|g(z)| = |f(z+iB)| \leq M'$ pour un certain réel $M' > 0$. Par suite $|g(z)| \leq \max(M, M')$ pour tout $z \in \Delta$.

Dans les deux cas la fonction g est bornée en module sur la droite Δ. □

CHAPITRE V

HOMOGRAPHIE

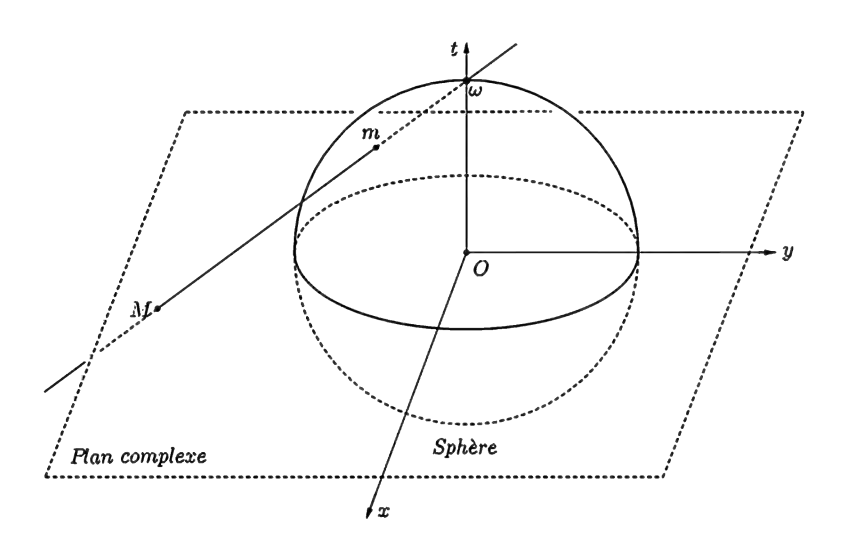
1. Définitions et notations

1.1. On complète le plan complexe en lui rajoutant le point à l'infini ∞ ; on obtient alors ce qu'on appelle la *sphère de Riemann* et qu'on note $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On prolonge une partie des opérations de l'addition et de la multiplication de $\mathbb{C}$ à $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant :

$$z + \infty = \infty + z = \infty \quad \infty \times \infty = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{\infty} = 0 \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}$$

$$z \times \infty = \infty \times z = \infty \quad \text{et} \quad \frac{z}{0} = \infty \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^*.$$

On peut montrer que, du point de vue topologique, $\widehat{\mathbb{C}}$ est la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (*cf.* dessin ci-dessous).



L'application ψ de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ privée du point ω sur le plan complexe $\mathbb{C}$ définie par $\psi(x, y, t) = \frac{x}{1-t} + i\frac{y}{1-t}$ est une bijection. Quand m se rapproche du point ω, le point M est rejeté à l'infini dans le plan complexe. Ainsi $\widehat{\mathbb{C}}$ s'identifie à la sphère $\mathbb{S}^2$, ce qui justifie l'appellation ***sphère de Riemann*** pour $\widehat{\mathbb{C}}$. L'application ψ s'appelle ***projection stéréographique.***

1.2. Définition. *Une* **homographie** *de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une transformation h qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe :*

$$z' = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{si } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty \end{cases} \tag{V.1}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes.

On vérifie immédiatement que, si $ad - bc = 0$, la transformation h est constante ; on supposera donc $ad - bc \neq 0$.

2. Étude de l'homographie

2.1. Cas où elle est une similitude

On suppose $c = 0$. Comme $ad - bc \neq 0$, on a $d \neq 0$ et $a \neq 0$; h s'écrit alors $h(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \frac{a}{d}$ et $\beta = \frac{b}{d}$. On voit clairement que $\omega_\infty = \infty$ est un point fixe de h. Voyons s'il en existe un autre ω_0 ; si tel est le cas, il doit vérifier $\alpha\omega_0 + \beta = \omega_0$. Si $\alpha = 1$, h est une translation si $\beta \neq 0$, donc pas de point fixe et l'identité si $\beta = 0$ donc tout point est fixe. Si $\alpha \neq 1$, h admet $\omega_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ comme point fixe dans $\mathbb{C}$.

Regardons la décomposition de h en transformations élémentaires bien connues. En posant $\rho = |\alpha|$ et $\theta = \mathrm{Arg}(\alpha)$, on voit clairement qu'on passe de z à $z' = h(z)$ par la suite de transformations :

$$z \longmapsto z_1 = \rho z \longmapsto z_2 = e^{i\theta} z_1 = \alpha z \longmapsto z_3 = z_2 + \beta = \alpha z + \beta = z'.$$

La tranformation h s'écrit donc $h = \tau_\beta \circ r(0,\theta) \circ h(0,\rho)$ où $h(0,\theta)$ est l'homothétie de centre 0 et de rapport ρ, $r(0,\theta)$ est la rotation de centre 0 et d'angle θ et τ_β est la translation de vecteur β. L'homographie h est donc une *similitude directe.*

Désormais, dans toute la suite, on supposera $c \neq 0$. C'est le cas générique ; il offre aussi une richesse géométrique immense.

2.2. La décomposition canonique

Nous allons mettre h sous la forme canonique $h(z) = \alpha + \frac{\beta}{cz+d}$. Celle-ci va nous permettre de la décomposer en transformations géométriques bien connues.

Comme on suppose $c \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cz+d} \\ &= \alpha + \frac{\beta}{cz+d} \end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{a}{c}$ et $\beta = \frac{bc-ad}{c}$. On pose $Z = cz + d$ et on note s la similitude directe qui à z associe Z. On a la décomposition qui suit :

$$z \longmapsto Z = cz + d \longmapsto z_1 = \frac{1}{\overline{Z}} \longmapsto z_2 = \overline{z}_1 = \frac{1}{Z} \longmapsto z_3 = \beta z_2 = \frac{\beta}{Z} \longmapsto \alpha + z_3 = \alpha + \frac{\beta}{Z}.$$

D'où $h = \tau_\alpha \circ r(0,\eta) \circ h(0,|\beta|) \circ s_{0x} \circ I(0,1) \circ s$ où τ_α est la translation de vecteur α, s_{0x} est la réflexion par rapport à l'axe $(0x)$, $h(0,|\beta|)$ l'homothétie de centre 0 et de rapport

$|\beta|$, $r(0,\eta)$ la rotation de centre O et d'angle $\eta =$ argument de β et $I(0,1)$ l'inversion de pôle 0 et de puissance 1.

On se donne un point O du plan complexe et κ un réel non nul. On appelle *inversion* de *pôle* O et de *puissance* κ, l'application notée $I(O,\kappa)$ qui, à tout point M distinct de O associe le point M' sur la droite (OM) tel que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \kappa$. On peut bien sûr la prolonger à toute la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ en posant $I(O,\kappa)(O) = \infty$ et $I(O,\kappa)(\infty) = O$.

2.3. Le groupe des homographies

L'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies de $\widehat{\mathbb{C}}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe non commutatif.

Soient $h_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ et $h_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ deux homographies. Un calcul simple donne l'expression de la composée :

$$h_2 \circ h_1(z) = \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)} \tag{V.2}$$

qui montre bien que $h_2 \circ h_1$ est une homographie. L'élément neutre est l'identité donnée par $a = d = 1$ et $b = c = 0$ ou $a = d = -1$ et $b = c = 0$. Toute homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est inversible et a pour inverse $h^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. Ainsi l'ensemble $\mathcal{H}$ des homographies muni de la composition des applications est un groupe. Il n'est pas commutatif car, si on prend par exemple $h_1(z) = z+1$ et $h_2(z) = \frac{1}{z}$, on a $h_1 \circ h_2(z) = \frac{z+1}{z}$ alors que $h_2 \circ h_1(z) = \frac{1}{z+1}$.

2.4. Les points fixes

Soit $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie qui n'est pas l'identité. Un point fixe de h vérifie l'équation :

$$z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

• Si $c = 0$, on sait que h a ∞ comme seul point fixe si $\frac{a}{d} = 1$ et deux points fixes ∞ et $\frac{1}{1-\frac{a}{d}}$ si $\frac{a}{d} \neq 1$. Donc au plus deux points fixes.

• Supposons $c \neq 0$. Alors ∞ n'est pas un point fixe de h et $z \in \mathbb{C}$ en est un si, et seulement si, $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. On résout cette équation en calculant le discriminant $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a+d)^2 - 4$.

– Si $\Delta = 0$, cette équation a une solution double, c'est-à-dire h a un seul point fixe.

– Si $\Delta \neq 0$, l'équation a deux solutions distinctes c'est-à-dire h a deux points fixes différents.

Aussi bien dans le cas $c = 0$ que $c \neq 0$, si h a trois points fixes distincts dans $\widehat{\mathbb{C}}$ (l'un de ces points peut très bien être ∞), h est l'identité. Par suite deux homographies qui coïncident sur trois points distincts sont égales.

3. Le groupe PSL(2,C)

3.1. La description du groupe

Soit $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ le groupe des matrices complexes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversibles. L'application déterminant det : $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \longmapsto \det A \in \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes. Son noyau

est un sous-groupe normal de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ qu'on note $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Alors l'application :

$$\text{(V.3)} \qquad \Theta : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longmapsto \left(z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \in \mathcal{H}$$

est un morphisme de groupes. Ceci découle du calcul du produit de deux homographies fait à la sous-section 2.3. Ce morphisme est en plus surjectif puisque toute homographie est associée à une matrice de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Le noyau de Θ est constitué de toutes les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, on ait $\frac{az+b}{cz+d} = z$ c'est-à-dire $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Ce qui implique $b = c = 0$ et $a = d$. Mais comme $ad = 1$ (car $ad - bc = 1$) on doit avoir $a = d = 1$ ou $a = d = -1$. Par suite $\ker\Theta$ est réduit aux deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\ker\Theta = \{I, -I\}$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, le quotient de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ par le sous-groupe $\{I, -I\}$ est un groupe noté $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. On a donc un ismorphisme :

$$\Theta : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}$$

qui à tout élément de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ représenté par une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe l'homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

3.2. La 3-transitivité de l'action de $\mathcal{H}$

Soient $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distincts deux à deux. Montrons qu'il existe toujours une unique homographie $h \in \mathcal{H}$ telle que $\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1. \end{cases}$

On sait que la transformation qu'on cherche est de la forme $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et qu'elle doit être telle que :

$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1. \end{cases}$$

On suppose d'abord qu'aucun des z_1, z_2, z_3 n'est ∞. Trois petites feintes alors : pour envoyer z_1 sur ∞, on se débrouille pour que $(z - z_1)$ soit un facteur au dénominateur. De même, pour envoyer z_2 sur 0, on se débrouille pour que $(z - z_2)$ soit un facteur au numérateur. A priori l'homographie $\frac{z-z_2}{z-z_1}\alpha$ (où α est une constante complexe non nulle) fait le travail. Pour que finalement cette homographie envoie z_3 sur 1, il suffit de prendre $\alpha = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$. Ainsi notre homographie cherchée est :

$$\text{(V.4)} \qquad h(z) = \frac{z-z_2}{z-z_1} : \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

Elle est unique d'après la question 4. On remarque que cette expression convient aussi même si l'un des z_1, z_2, z_3 est ∞. Plus précisément, on prend :

- $h(z) = \frac{z-z_2}{z_3-z_2}$ si $z_1 = \infty$;
- $h(z) = \frac{z_3-z_1}{z-z_1}$ si $z_2 = \infty$;
- $h(z) = \frac{z-z_2}{z-z_1}$ si $z_3 = \infty$.

À partir de ce qui précède, on peut montrer que l'action du groupe $\mathcal{H}$ sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ est 3-transitive, c'est-à-dire, pour tous $z_1, z_2, z_3, z_1', z_2', z_3' \in \widehat{\mathbb{C}}$, il existe une homographie $h \in \mathcal{H}$ telle que $\begin{cases} h(z_1) = z_1' \\ h(z_2) = z_2' \\ h(z_3) = z_3'. \end{cases}$ En effet, il existe une unique homographie h telle que :

$$\begin{cases} h(z_1) = \infty \\ h(z_2) = 0 \\ h(z_3) = 1 \end{cases}$$

et une unique homographie h' telle que :

$$\begin{cases} h'(z_1') = \infty \\ h'(z_2') = 0 \\ h'(z_3') = 1. \end{cases}$$

Alors $\phi = h'^{-1} \circ h$ est l'unique homographie telle que :

$$\begin{cases} \phi(z_1) = z_1' \\ \phi(z_2) = z_2' \\ \phi(z_3) = z_3'. \end{cases}$$

L'action du groupe $\mathcal{H}$ sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ est donc 3-transitive.

4. Le birapport

4.1. Définition. *On appelle* **birapport** *de quatre points $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ pris dans cet ordre, la quantité :*

$$\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}. \tag{V.5}$$

4.2. Proposition. *Soit h une homographie qui envoie z_1 sur ∞, z_2 sur 0 et z_3 sur 1. Alors $h(z_4) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$.*

Preuve. Il existe une et une seule homographie h telle que $h(z_1) = \infty$, $h(z_2) = 0$ et $h(z_3) = 1$; elle est donnée dans la sous-section 3.2 par $h(z) = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{z-z_1}{z-z_2}$. On voit donc tout de suite que :

$$\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = h(z_4). \tag{V.6}$$

Ceci termine la preuve. □

4.3. Proposition. *Une homographie $\phi \in \mathcal{H}$ préserve toujours le birapport de quatre points, c'est-à-dire, on a $\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4)$ pour tous $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$.*

Preuve. Comme dans la proposition qui précède, il existe une et une seule homographie h telle que $h(z_1) = \infty$, $h(z_2) = 0$ et $h(z_3) = 1$. De même, si ϕ est une homographie quelconque, il existe une unique homographie g telle que :

$$\begin{cases} g(\phi(z_1)) = \infty \\ g(\phi(z_2)) = 0 \\ g(\phi(z_3)) = 1. \end{cases}$$

Elle vérifie aussi $\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = g(\phi(z_4))$. On voit donc que $g \circ \phi$ et h coïncident sur les trois points distincts deux à deux z_1, z_2, z_3, donc elles sont égales. En particulier $g(\phi(z_4)) = h(z_4)$, c'est-à-dire :

$$\rho(\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)) = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

qui montre bien que le birapport se conserve par toute homographie. □

5. Étude géométrique d'un exemple

Cela nous permettra de voir comment s'utilisent les nombres complexes en géométrie et en même temps de constater que l'homographie est un peu différente des transformations que nous connaissons habiuellement. Nous allons faire cela sous forme d'exercice.

Soit f la transformation qui à M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{2z+1}{z+1}.$$

1. Montrer que l'homographie f est un produit de transformations géométriques élémentaires (translations, homothéties, rotations, inversions...) qu'on précisera.

On peut écrire :

$$f(z) = z' = \frac{2z+2-1}{z+1} = 2 - \frac{1}{z+1}.$$

On passe donc de z à z' par la suite d'applications qui suivent :

$$z \overset{f_1}{\longmapsto} z+1 \overset{f_2}{\longmapsto} \frac{1}{\overline{z+1}} \overset{f_3}{\longmapsto} \frac{1}{z+1} \overset{f_4}{\longmapsto} -\frac{1}{z+1} \overset{f_5}{\longmapsto} 2 - \frac{1}{z+1}$$

où f_1 est la translation de vecteur (le nombre complexe) 1, f_2 est l'inversion de pôle l'origine et de puissance 1, f_3 est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, f_4 est la symétrie par rapport à l'origine et f_5 est la translation de vecteur 2.

2. Soit Ω_- la partie du plan telle que $x^2 + y^2 < 1$. Quelle est son image par la tranformation f ?

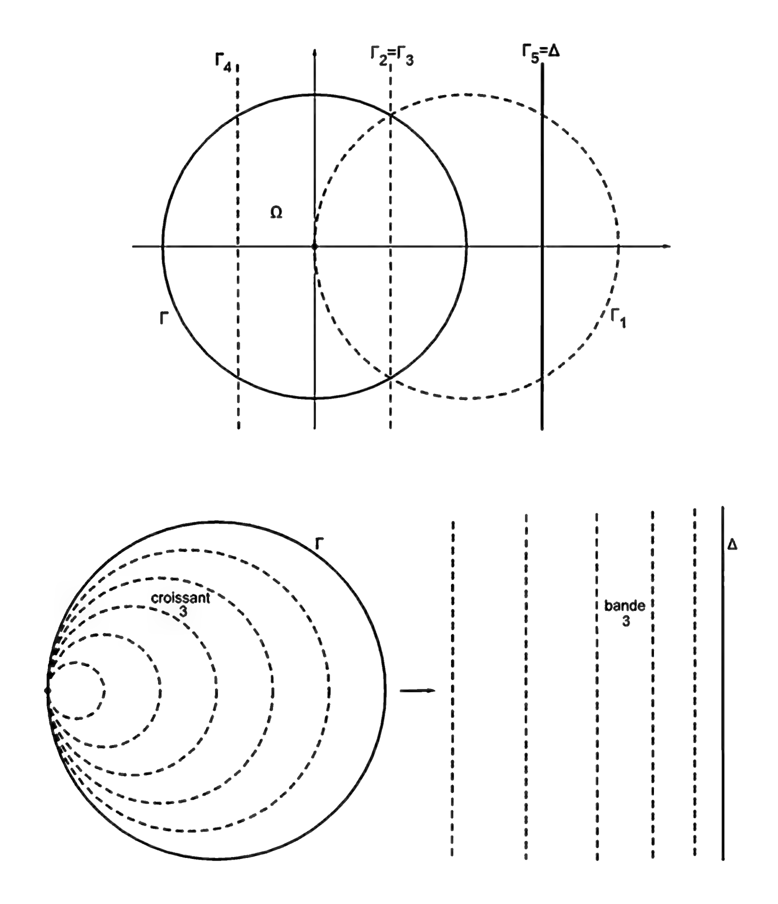
Pour voir comment se transforme Ω, il est nécessaire de voir comment ça se passe pour le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ (c'est le cercle de centre O et de rayon 1 privé bien sûr du point $z = -1$ qui n'a pas d'image dans $\mathbb{C}$). Par f_1, Γ devient Γ_1, cercle de centre $O_1 = (1, 0)$ et de rayon 1 ; l'inversion f_2 le transforme en la droite Γ_2 d'équation $x = \frac{1}{2}$,

que f_3 laisse invariante mais qu'on va noter Γ_3 ; f_4 la ramène sur la droite Γ_4 d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et enfin f_5 transforme cette dernière en la droite Δ d'équation $x = \frac{3}{2}$.

La transformation f est une bijection de l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{2\}$. Elle a pour transformation inverse $f^{-1}(w) = \frac{-w+1}{w-2}$ (définie bien sûr sur $\mathbb{C}\backslash\{2\}$) ; donc : l'application $f : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{2\}$ est un homéomorphisme. Posons :

- $\Omega = \mathbb{C}\backslash\Gamma$ et $\Omega' = \mathbb{C}\backslash(\{2\} \cup \Delta)$,
- $\Omega_- = \{z \in \Omega : |z| < 1\}$ et $\Omega_+ = \{z \in \Omega : |z| > 1\}$,
- $\Omega'_- = \{z = x + iy \in \Omega' : x < \frac{3}{2}\}$ et $\Omega'_+ = \{z = x + iy \in \Omega' : x > \frac{3}{2}\}$.

L'ouvert Ω est non connexe : ses composantes connexes sont Ω_- et Ω_+ ; de même l'ouvert Ω' est non connexe : ses composantes connexes sont Ω'_- et Ω'_+. La restriction de f à Ω est un homéomorphisme sur Ω' ; f va donc envoyer homéomorphiquement la composante connexe Ω_- de Ω sur l'une des deux composantes connexes de Ω'. Pour savoir laquelle il suffit de voir où va le point $z_0 = 0$; celui-ci a pour image 1, il est donc dans Ω'_-. Le transformé par f de l'ouvert Ω_- est donc l'ouvert Ω'_-. □



Dans le dessin ci-dessus, les cercles intérieurs au cercle Γ privés du point $z = -1$ et qui lui sont tangents en ce point forment un *feuilletage* du disque Ω_-. La transformation f les redresse en droites parallèles à Δ et situées à sa gauche. On peut voir aussi que f envoie par exemple le $3^{\text{ème}}$ croissant sur la $3^{\text{ème}}$ bande.

6. Biholomorphismes

Le problème de l'équivalence entre objets mathématiques est central. Nous allons voir de façon très succinte ce qu'il en est pour les ouverts de $\mathbb{C}$. Nous prendrons les plus simples.

Soient U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$. Rappelons qu'une application $\phi : U \longrightarrow V$ est un *biholomorphisme* si elle est bijective, holomorphe et si ϕ^{-1} est aussi holomorphe. On dira que U et V sont *biholomorphiquement équivalents* s'il existe un biholomorphisme de U sur V. Un biholomorphisme de U sur lui-même est appelé *automorphisme* de U. L'ensemble des automorphismes de U est un groupe noté $\mathrm{Aut}(U)$.

Notons que deux ouverts U et V biholomorphiquement équivalents ont des groupes d'automorphismes isomophes. En effet, si $h : U \longrightarrow V$ est un biholomorphisme, il est immédiat de vérifier que l'application $\phi \in \mathrm{Aut}(U) \longmapsto h \circ \phi \circ h^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$ est un isomorphisme de groupes.

Nous allons déterminer ces groupes pour le disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Mais avant cela nous allons donner l'un des théorèmes les plus puissants dans cette direction.

6.1. Théorème d'uniformisation. *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ différent de $\mathbb{C}$. Alors U est biholomorphiquement équivalent au disque unité ouvert $\mathbb{D}$.*

C'est une version un peu plus faible que celle qui donne l'uniformisation d'une surface de Riemann simplement connexe de façon générale. Mais elle a déjà eu un impact énorme sur le développement d'autres branches des mathématiques depuis sa démonstration (qui remonte à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle). On peut la trouver dans [Car] pour le disque et dans [SG] pour une surface de Riemann simplement connexe quelconque.

6.2. Lemme de Schwarz. *Soit $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ et telle que $|f| < 1$ et $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(z)| = |z|$ pour un certain $z \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta}z$.*

Démonstration. On applique le principe du maximum à la fonction $h(z) = \frac{f(z)}{z}$ pour $z \neq 0$ et $h(0) = f'(0)$. Sur tout cercle γ_r centré en 0 et de rayon $0 < r < 1$, ona $|h(z)| \leq \frac{1}{r}$ et donc $|h(z)| \leq \frac{1}{r}$ pour $|z| \leq r$. On fait tendre r vers 1 et on obtient $|h(z)| \leq 1$, c'est-à-dire $|f(z)| \leq |z|$ pour tout z. Si l'égalité $|f(z)| = |z|$ est atteinte en un point $z \in \mathbb{D}$ ou si $|f'(0)| = 1$, $|h|$ atteint son maximum sur l'ouvert $\mathbb{D}$ et donc h est constante ; par suite il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = e^{i\theta}$ *i.e.* $f(z) = e^{i\theta}z$. □

Ce lemme est utilisé de manière substantielle dans la détermination explicite des automorphismes du disque $\mathbb{D}$. C'est ce que nous allons voir tout de suite.

6.3. Théorème. *Tout biholomorphisme du disque unité ouvert $\mathbb{D}$ s'écrit sous la forme $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1}$ où θ est un réel et $p \in \mathbb{D}$. De manière équivalente, on peut aussi écrire f sous la forme $\frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ avec $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.*

Démonstration. D'abord, toute transformation $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1}$ où θ est un réel et $p \in \mathbb{D}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$. En effet, comme la multiplication par $e^{i\theta}$ est une isométrie euclidienne, ceci va découler de l'assertion qui suit.

On note $\overline{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ dont le bord est le cercle unité $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Soit $p \in \mathbb{D}$ et posons $\omega = \frac{1}{\overline{p}}$; il est clair que $|\omega| > 1$ et donc $\omega \notin \overline{\mathbb{D}}$. Pour tout $z \in \Omega = \mathbb{C}\backslash\{\omega\}$, posons $\varphi(z) = \frac{z-p}{\overline{p}z-1}$.

L'application φ est un automorphisme de Ω et sa restriction au disque unité ouvert $\mathbb{D}$ est un automorphisme de celui-ci.

Démontrons cela. Le fait que φ soit un automorphisme de Ω est immédiat : φ est une bijection de l'ouvert Ω sur lui-même d'inverse $\varphi^{-1}(w) = \frac{w-p}{\overline{p}w-1} = \varphi(w)$.

Pour voir que φ induit un automorphisme de $\mathbb{D}$, il suffit de montrer que l'image $\varphi(\mathbb{D})$ de $\mathbb{D}$ par φ est contenue dans $\mathbb{D}$. Comme φ est une homographie, elle transforme tout cercle qui ne passe pas par ω en un cercle. Montrons qu'elle laisse le cercle unité Γ globalement invariant. Il suffit à cet effet de montrer que les images de trois points distincts de Γ sont encore sur Γ. (Ce qui suit se justifie en regardant juste les trois dessins.) On a :

$$\varphi(1) = \frac{1-p}{\overline{p}-1}$$

qui est de module 1. De même :

$$\varphi(-1) = \frac{-1-p}{-1-\overline{p}}$$

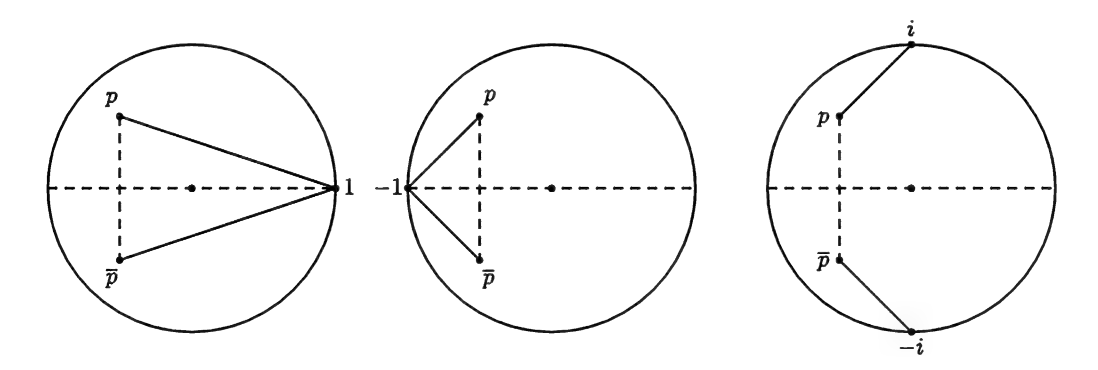
qui est aussi de module 1. Calculons le module de :

$$\varphi(i) = \frac{i-p}{\overline{p}i-1}.$$

On a :

$$\left|\frac{i-p}{\overline{p}i-1}\right| = \frac{|i-p|}{|\overline{p}i-1|} = \frac{|i-p|}{|-i(-i-\overline{p})|} = \frac{|i-p|}{|(-i-\overline{p})|} = 1.$$

Comme φ est un homéomorphisme de Ω sur lui-même laissant Γ globalement invariant, il envoie composante connexe de $\Omega\backslash\Gamma$ ($\mathbb{D}$ en est une) sur composante connexe de $\Omega\backslash\Gamma$. Mais $p \in \mathbb{D}$ et $\varphi(p) = 0$ qui appartient encore à $\mathbb{D}$; donc l'image de $\mathbb{D}$ est $\mathbb{D}$. Ce qui termine la démonstration. □



Soit maintenant f un biholomorphisme de $\mathbb{D}$. Posons $z_0 = f(0)$, $h(z) = \frac{z-z_0}{(\overline{z}_0)z-1}$ et $g = h \circ f$. Alors g est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ qui vérifie $g(0) = 0$. D'après le

lemme de Schwarz, on a $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Mais comme g^{-1} est aussi un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ qui vérifie $g^{-1}(0) = 0$, on a $|g^{-1}(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. On en déduit donc $|g(z)| = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. La fonction $\frac{g(z)}{z}$ est holomorphe et son module $\left|\frac{g(z)}{z}\right|$ est constant égal à 1 ; elle est donc égale à une constante λ de module 1. D'où $f(z) = h^{-1}(g(z)) = h^{-1}(\lambda z) = \lambda \frac{z - \overline{\lambda} z_0}{(\lambda \overline{z}_0)z - 1}$. En posant $p = \overline{\lambda} z_0$ et $\lambda = e^{i\theta}$ on peut écrire $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-p}{\overline{p}z - 1}$. C'est l'expression cherchée. Maintenant on peut remarquer que :

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - p}{\overline{p}z - 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot z - e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot p}{\overline{p}e^{-i\frac{\theta}{2}} \cdot z - e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}$$

avec $\alpha = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1 - p\overline{p}}}$ et $\beta = \frac{\overline{p}e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1 - p\overline{p}}}$. Ceci termine la démonstration du théorème. □

6.4. Corollaire. *Tout automorphisme du demi-plan ouvert* $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ *est de la forme* $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *où* a, b, c, d *sont des réels tels que* $ad - bc = 1$.

Démonstration. On peut montrer assez facilement que la transformation homographique $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$. On a donc une application :

$$\zeta : \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

définie par $\zeta(f) = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$. On vérifie immédiatement que ζ est un isomorphisme de groupes. Par conséquent, tout biholomorphisme h de $\mathbb{H}$ est du type $h = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ avec $f(z) = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}$, α et β vérifiant $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Un calcul un peu long donne :

$$h(z) = \frac{(\Re(\alpha) + \Re(\beta))z + (\Im(\alpha) + \Im(\beta))}{(\Im(\beta) - \Im(\alpha))z + (\Re(\alpha) - \Re(\beta))}.$$

(Ici $\Re(w)$ et $\Im(w)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe w.) On pose $a = \Re(\alpha) + \Re(\beta)$, $b = \Im(\alpha) + \Im(\beta)$, $c = \Im(\beta) - \Im(\alpha)$ et $d = \Re(\alpha) - \Re(\beta)$. Clairement, a, b, c, d sont des réels et le lecteur peut vérifier que $ad - bc = \alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1$. □

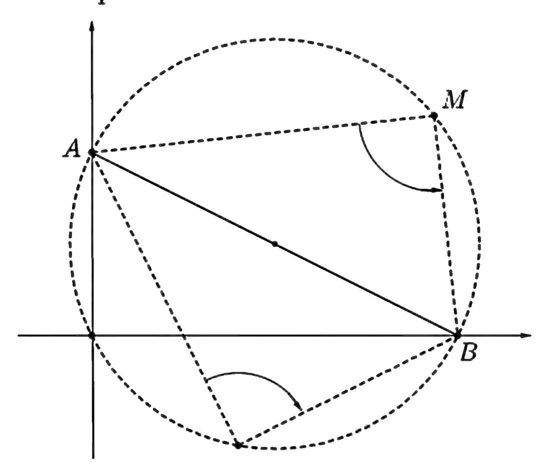
EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

À tout point M de l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = h(z)$ où $h(z) = \frac{z-2}{z-i}$. Où doit varier M pour que le point M' soit constamment sur l'axe imaginaire pur ? (Si on fait un dessin, on voit plus clair !)

Solution

On a $z' = \frac{z-2}{z-i} = \frac{2-z}{i-z}$; donc $\mathrm{Arg}(z') = \mathrm{Arg}(2-z) - \mathrm{Arg}(i-z)$. Dire que z' varie sur l'axe imaginaire pur, c'est équivalent à dire que son argument est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Soient A et B les points ayant respectivement pour affixes i et 2. La mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est donc congrue à $\frac{\pi}{2}$ modulo π ; par suite le point M est sur le cercle de diamètre le segment AB privé du point A.



On peut aussi retrouver le même résultat de la façon suivante. On calcule la partie réelle de z' en fonction des coordonnées réelles (x, y) du point z. On trouve :

$$\Re(z') = \frac{(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}{x^2 + (y-1)^2}.$$

Dire que z' est imaginaire pur, c'est dire que $\Re(z') = 0$ donc $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ *i.e.* z est sur le cercle de centre $\omega = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ qui est exactement le cercle qu'on a déjà déterminé. □

Les trois exercices qui suivent sont liés et utilisent les mêmes notations. Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On peut le voir comme $\mathbb{R}^2$ en confondant un point M avec ses coordonnées (x, y) mais aussi comme le plan complexe $\mathbb{C}$ en identifiant $M = (x, y)$ à son affixe $z = x + iy$. La norme d'un vecteur $\vec{u}$ sera notée $||\vec{u}||$.

Exercice 2

On se donne un nombre réel strictement positif a, le point $A \in \mathcal{P}$ de coordonnées $(a, 0)$, $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = a$ et $f : t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\longrightarrow f(t) \in \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Dans toute

la suite $t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ jouera le rôle de paramètre. Un point M de $\mathcal{P}$ sera repéré par ses coordonnées (x, y) relativement à $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ou par son affixe $z = x + iy$.

Pour chaque t on note s_t la transformation de $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point $M_t = s_t(M)$ d'affixe :

$$z_t = f(t)(\cos t + i \sin t)z.$$

1 - Quelle est la nature de l'application s_t ? Donner les éléments géométriques qui la caractérisent.

2 - Donner les équations qui la définissent dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ainsi que pour son inverse s_t^{-1}.

Dans toute la suite de cette première partie, f sera la fonction $f(t) = \frac{1}{\cos t}$.

3 - Montrer que, pour tout point M distinct de O et tout t, le triangle OMM_t est rectangle en M.

4 - Le point M étant fixe, quel est l'ensemble $J(M)$ décrit par M_t lorsque t varie ?

5 - Montrer que l'image de $\mathcal{D}$ par s_t est une droite $\mathcal{D}_t$ dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement des paramètres a et $\theta = \tan t$.

6 - Montrer que la parabole $\mathcal{B}$ de foyer O, dont la tangente au sommet est $\mathcal{D}$, a pour équation :

$$y^2 = 4a(a - x).$$

7 - Montrer que pour tout t, l'intersection de $\mathcal{D}_t$ et de $\mathcal{B}$ est formée d'un point unique K_t et que $\mathcal{D}_t$ est tangente à $\mathcal{B}$ en ce point.

8 - Montrer que lorsque t décrit $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, K_t décrit toute la parabole $\mathcal{B}$.

On note $\mathcal{C}$ un cercle de centre A dont le rayon R est strictement positif et différent de a. On note Γ la conique d'équation :

$$\frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 - a^2} = 1.$$

9 - Indiquer suivant les valeurs de R la nature de la conique Γ. Déterminer son centre et ses foyers.

10 - Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}_t$ image de $\mathcal{C}_t$ par s_t.

11 - Montrer que $\mathcal{C}_t$ est définie par l'équation : $(x-a)^2 + (y - a\theta)^2 = R^2(1 + \theta^2 t)$.

12 - Montrer que lorsque $\mathcal{C}_t$) et Γ se coupent, leur intersection est formée de deux points N_t et N'_t symétriques par rapport à $\mathcal{D}$ et dont on calculera l'ordonnée.

Solution

1 - On a $z_t = f(t)e^{it}z$. L'application s_t est donc la composée de la rotation r de centre l'origine O et d'angle t et de l'homothétie h de centre l'origine et de rapport $f(t)$; par suite s_t est la similitude de centre O, de rapport $f(t)$ et d'angle t.

2 - Notons (x_t, y_t) les coordonnées cartésiennes du point M_t. Alors :

$$\begin{cases} x_t = f(t)((\cos t)x - (\sin t)y) \\ y_t = f(t)((\sin t)x + (\cos t)y). \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que l'application inverse s_t^{-1} associe au point de coordonnées (x, y) le point :

$$\frac{1}{f(t)}\big((\cos t)x + (\sin t)y, -(\sin t)x + (\cos t)y\big).$$

3 - Comme $f(t) = \frac{1}{\cos t}$, $x_t = x - \theta y$ et $y_t = \theta x + y$ où $\theta = \mathrm{tg}(t)$. Le triangle OMM_t est rectangle en M si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MM_t}$ sont orthogonaux. Les coordonnées de ces derniers sont :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MM_t} = \begin{pmatrix} -\theta y \\ \theta x \end{pmatrix}.$$

Le calcul immédiat de leur produit scalaire $\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MM_t} \rangle$ montre qu'il est nul.

4 - Comme les points O et M sont fixes, la droite (OM) l'est aussi. Donc, le point M_t varie (lorsque t varie dans $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$) de telle sorte que le vecteur $\overrightarrow{MM_t}$ reste orthogonal à (OM), donc sur la droite passant par M et orhogonale à (OM). Comme d'autre part t décrit tout l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, M_t décrit toute cette perpendiculaire. Finalement $J(M)$ est la droite passant par M et perpendiculaire à la droite (OM).

5 - Des deux relations $x_t = x - \theta y$ et $y_t = \theta x + y$ on tire $x = \frac{1}{1+\theta^2}(x_t + \theta y_t)$ et $y = \frac{1}{1+\theta^2}(-\theta x_t + y_t)$. L'équation $x = a$ de la droite $\mathcal{D}$ donne automatiquement celle de sa transformée $\mathcal{D}_t$ par la similitude s_t :

$$x_t + \theta y_t = a(1 + \theta^2).$$

6 - Comme $\mathcal{B}$ est tangente à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = a$ et qu'elle a pour foyer le point O, sa directrice Δ est parallèle à $\mathcal{D}$ et a pour équation $x = 2a$. Comme tout point $M = (x, y)$ de $\mathcal{B}$ vérifie distance(M, O) = distance(M, Δ) on a $OM^2 = MM_0^2$ où M_0 est la projection orthogonale de M sur Δ. En faisant intervenir les coordonnées des divers points on obtient la relation $x^2 + y^2 = (x - 2a)^2$; ce qui nous donne l'équation cherchée :

$$y^2 = 4a(a - x).$$

7 - Les points d'intersection K_t de la droite $\mathcal{D}_t$ et de la parabole $\mathcal{B}$ ont leurs coordonnées (x, y) solutions du système :

$$\begin{cases} y^2 = 4a(a - x) \\ x + \theta y = a(1 + \theta^2). \end{cases}$$

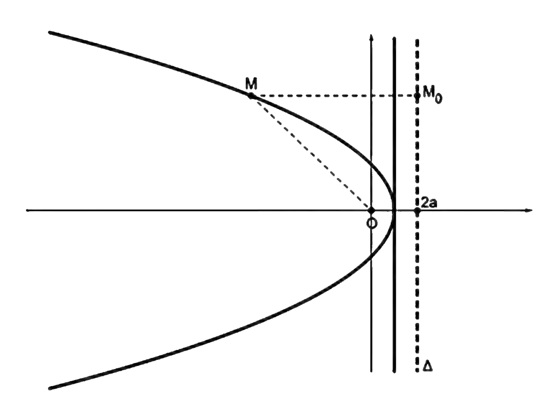
Pour résoudre ce système, on reporte dans la première équation la valeur de x prise dans la seconde. On obtient l'équation du second degré en y :

$$y^2 - 4a\theta y + 4a^2\theta^2 = 0$$

qui admet comme seule solution $y = 2a\theta$; par suite $x = a(1-\theta^2)$. Il n'y a donc qu'un seul point d'intersection entre la parabole $\mathcal{B}$ et la droite $\mathcal{D}_t$; comme, pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\mathcal{D}_t$ n'est jamais parallèle à l'axe de $\mathcal{B}$, elle lui est forcément tangente. Le point de tangence est $K_t = (a(1-\theta^2), 2a\theta)$. (Pour se rafraîchir la mémoire, le lecteur peut faire l'exercice qui consiste à étudier la position relative d'une droite par rapport à une parabole.)

8 - D'après la question 7, les coordonnées du point K_t (qui est sur la parabole $\mathcal{B}$) sont données en fonction de t (on se rappelle que $\theta = \text{tg}(t)$) par :

$$\begin{cases} x = a(1-\theta^2) \\ y = 2a\theta. \end{cases}$$



Quand t tend vers $-\frac{\pi}{2}$, θ tend vers $-\infty$ et donc x et y tendent vers $-\infty$; pour $t = 0$, K_t est au point de coordonnées $(a, 0)$; le point mobile K_t décrit donc toute la partie de $\mathcal{B}$ en dessous de l'axe des x lorsque $t \in]-\frac{\pi}{2}]$. De la même manière on montre que K_t décrit toute la partie de $\mathcal{B}$ au-dessus de l'axe des x lorsque $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

9 - On pose $\beta = \sqrt{|R^2 - a^2|}$. La conique Γ est une ellipse si $R > a$ et une hyperbole si $R < a$.

• $\underline{R > a}$. Alors Γ est l'ellipse d'équation : $\frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Le centre de cette ellipse est le point $\omega = (a, 0)$. Pour $y = 0$, on a deux sommets dont les abscisses respectives sont $a + R$ et $a - R$, donc le grand axe est égal à $2R$. De même, pour $x = a$, on a deux sommets d'ordonnées respectives β et $-\beta$, donc le petit axe est égal 2β. Par suite les foyers (qui sont sur l'axe des x) ont pour abscisses respectives $a + c$ et $a - c$ avec $c = \sqrt{R^2 - \beta^2} = a$. Donc $F = (2a, 0)$ et $F' = (0, 0)$.

• $\underline{R < a}$. Alors Γ est l'hyperbole d'équation : $\frac{(x-a)^2}{\rho^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$. Là aussi, le centre de la conique est le point $\omega = (a, 0)$; de façon presque similaire à celle qui précède, on montre que les foyers F et F' de cette conique ont pour abscisses respectives $a + c$ et $a - c$ avec $c = \sqrt{R^2 + (a^2 - \rho^2)} = a$. Donc $F = (2a, 0)$ et $F' = (0, 0)$.

10 - Comme s_t est une similitude, le centre O_t du cercle $\mathcal{C}_t$ est le transformé de A c'est-à-dire le point O_t de coordonnées $(a, \theta a)$; quant à son rayon R_t il est égal au produit du rayon de $\mathcal{C}$ et du rapport de similitude, c'est-à-dire $R_t = \frac{R}{\cos t}$.

11 - Comme on vient de le voir, le cercle $\mathcal{C}_t$ a pour centre le point $O_t = (a, a\theta)$ et pour rayon $R_t = \frac{R}{\cos t}$. Il a donc pour équation $(x-a)^2 + (y-a\theta)^2 = R_t^2$ c'est-à-dire :

$$(x-a)^2 + (y-a\theta)^2 = R^2(1+\theta^2).$$

12 - La conique Γ et le cercle $\mathcal{C}_t$ ont leurs centres sur la droite $\mathcal{D}$ (qui est un axe de symétrie commun) ; leurs points d'intersection sont donc forcément symétriques par rapport à $\mathcal{D}$. Les coordonnées (x, y) de ces points sont les solutions du système :

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-a\theta)^2 = R^2(1+\theta^2) \\ \frac{(x-a)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2-a^2} = 1. \end{cases}$$

Sa résolution donne $y = \frac{\theta(a^2-R^2)}{a}$. En reportant dans la deuxième équation on trouve $(x-a)^2 = R^2\left(1 - \frac{\theta^2}{a^2}(R^2-a^2)\right)$; comme $R > a$, la quantité $\tau = R^2\left(1 - \frac{\theta^2}{a^2}(R^2-a^2)\right)$ n'est pas toujours positive ; elle l'est pour $|\theta| \leq \frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}$. Les points L_t et N_t ont alors pour abscisses respectives $a - \tau$ et $a + \tau$.

Exercice 3

Sur le plan épointé $\mathcal{P}^* = \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, on considère la transformation T qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = T(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Elle est connue sous le nom de *transformation de Joukovsky*.

1 - Construire géométriquement le point M' à partir du point M.

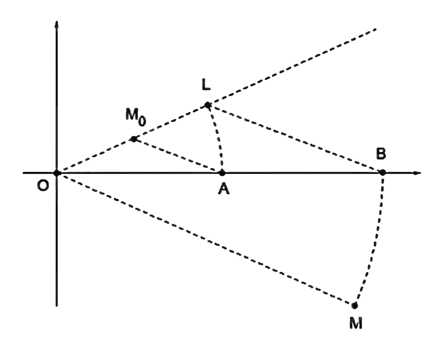
2 - Donner les coordonnées (x', y') du point M' en fonction du module r de z et de son argument θ.

3 - Quel est le lieu géométrique du point M' lorsque M varie sur le cercle de centre O et de rayon $\rho > 0$?

4 - Quel est le lieu géométrique du point M' lorsque M varie de telle sorte que $\theta = \text{Arg}(z)$ reste constant. On se limitera au cas où $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et on notera $\mathcal{D}_+$ la demi-droite ouverte où varie M.

Solution

1 - Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{1}{z}$; alors M' est le milieu du segment $[MM_0]$ et tout le monde sait comment il se construit. Reste seulement à contruire le point M_0. Comme $\text{Arg}(z_0) = -\text{Arg}(z)$, le point M_0 est sur la demi-droite Δ_+ symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la demi-droite passant par O et par M. Il suffit donc de construire sur Δ_+ le point dont la distance au point O est $\frac{1}{|z|}$. Sur l'axe des abscisses, on note A et B les points d'abscisses respectives 1 et $|z|$ et sur Δ_+, L sera le point dont la distance à O est égal à 1. Par A on mène la parallèle à (BL). Celle-ci coupe Δ_+ en un point dont on peut vérifier facilement (à l'aide du théorème de Thalès) que ce n'est rien d'autre que le point M_0 cherché.



2 - Si $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (avec r et θ désignant respectivement le module et l'argument de z), on a $z' = x' + iy' = \frac{1}{2}\left((r+\frac{1}{r})\cos\theta + i(r-\frac{1}{r})\sin\theta\right)$. Donc :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos\theta \\ \\ y' = \frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\theta \end{cases}$$

3 - Dans ce cas le module r est constant égal à ρ. Si $\rho = 1$, $y' = 0$ et $x' = \cos\theta$ et décrit l'intervalle $[-1, 1]$. Donc l'image du cercle unité par T est l'ensemble :

$$\{x' + iy' : y' = 0 \text{ et } -1 \leq x' \leq 1\}.$$

Supposons $\rho \neq 1$. On pose $a = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$ et $b = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$; a et b sont des constantes réelles non nulles et :

$$\begin{cases} \frac{x'}{a} = \cos\theta \\ \frac{y'}{b} = \sin\theta \end{cases}$$

ce qui donne $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ et qui montre que l'image du cercle de centre O et de rayon ρ par l'application T est l'ellipse de grand axe $2a = \rho + \frac{1}{\rho}$ et de petit axe $2b = |\rho - \frac{1}{\rho}|$; ses foyers sont les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$.

4 - Cette fois-ci θ reste constant dans $]0, \frac{\pi}{2}[$; on pose $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$; a et b sont des constantes réelles strictement positives et :

$$\begin{cases} \frac{x'}{a} = \frac{1}{2}(r+\frac{1}{r}) \\ \frac{y'}{b} = \frac{1}{2}(r-\frac{1}{r}), \end{cases}$$

ce qui donne $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ et qui montre que l'image $\mathcal{D}'_+$ de la demi-droite $\mathcal{D}_+$ est contenue dans l'hyperbole $\mathcal{H}$ ayant O pour centre de symétrie, les points $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ pour foyers et les droites d'équations $y = (\mathrm{tg}\theta)x$ et $y = -(\mathrm{tg}\theta)x$ pour asymptotes. En fait $\mathcal{D}'_+$ est la branche de $\mathcal{H}$ dans le demi-plan $x' > 0$.

Exercice 4

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on définit une suite de points $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $M_0 = 0$, $M_1 = 1$ et vérifiant les conditions qui suivent pour $n \geq 1$:

$$||\overrightarrow{M_nM_{n+1}}|| = r||\overrightarrow{M_{n-1}M_n}|| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \theta.$$

On note z_n l'affixe du point M_n et, pour $n \geq 1$, on pose $v_n = z_n - z_{n-1}$ qui est la coordonnée complexe du vecteur $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$.

1 - Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$.

2 - Pour tout n, exprimer v_n en fonction de n, r et θ.

3 - Représenter M_n dans le plan complexe lorsque $0 \leq n \leq 4$, $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Dans toute la suite on suppose $0 < r < 1$.

4 - Donner l'expression de z_n en fonction de n, r et θ.

5 - Soit Ω le point d'affixe $\omega = \frac{1}{1-re^{i\theta}}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \omega| = 0$.

6 - Montrer qu'il existe une similitude directe f de centre Ω (et dont précisera aussi l'angle et le rapport) telle que $f(M_{n-1}) = M_n$, pour tout $n \geq 1$.

7 - On suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$. Placer le point Ω et indiquer une construction géométrique de M_n à partir de M_{n-1}. Représenter les points M_n pour $0 \leq n \leq 8$.

Solution

1 - Comme par construction des points M_n :

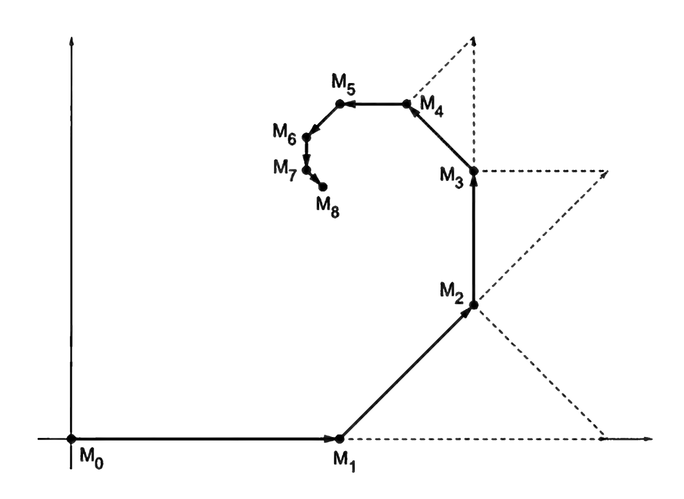
$$||\overrightarrow{M_nM_{n+1}}|| = r||\overrightarrow{M_{n-1}M_n}|| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{M_{n-1}M_n}, \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \theta,$$

on a $v_n = z_n - z_{n-1} = re^{i\theta}(z_{n-1} - z_{n-2}) = re^{i\theta}v_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

2 - De ce qui précède, et tenant compte du fait que $v_1 = 1$, on en déduit :

$$v_n = r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}v_1 = r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}.$$

3 - Voir figure qui suit. Il faut bien regarder le dessin pour comprendre comment les points M_2, M_3 et M_4 ont été construits à partir des données M_0 et M_1.



4 - Comme $v_n = z_n - z_{n-1}$, on a $z_n - z_0 = (z_n - z_{n-1}) + \cdots + (z_1 - z_0) = v_n + \cdots + v_1$. Mais $z_0 = 0$; d'où :

$$z_n = r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + \cdots + re^{i\theta} + 1 = \frac{1 - r^ne^{in\theta}}{1 - re^{i\theta}}.$$

5 - Comme $0 < r < 1$, $r^n e^{in\theta}$ tend vers 0, par suite z_n converge vers $\frac{1}{1-re^{i\theta}}$ et donc la suite (M_n) converge vers le point Ω. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n - \omega| = 0$.

6 - La similitude f de centre Ω, de rapport r et d'angle θ convient. En effet, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$ a pour coordonnée :

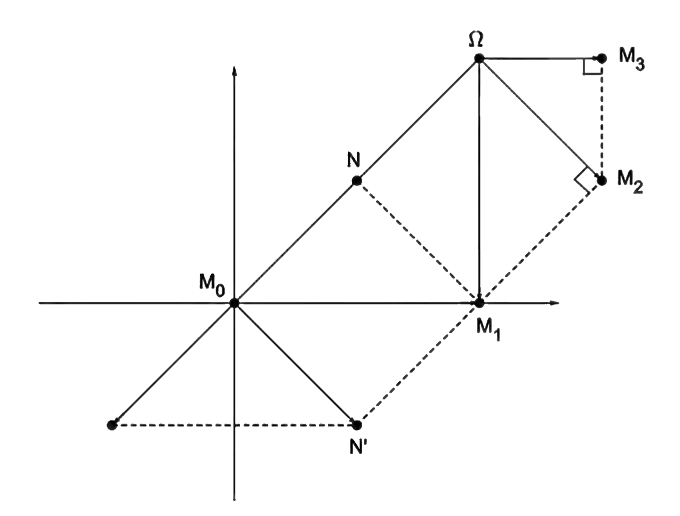
$$\frac{1}{1-re^{i\theta}} - (r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + \cdots + re^{i\theta} + 1) = \sum_{k=n}^{\infty} r^k e^{ik\theta} = re^{i\theta}\left(\sum_{k=n-1}^{\infty} r^k e^{ik\theta}\right).$$

Or $\sum\limits_{k=n-1}^{\infty} r^k e^{ik\theta}$ est la coordonnée du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_{n-1}}$. Donc $\overrightarrow{\Omega M_n} = re^{i\theta}\overrightarrow{\Omega M_{n-1}}$ et par suite $f(M_{n-1}) = M_n$ pour tout $n \geq 1$.

7 - Soit N le point d'affixe $u = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$; alors $u' = 1 - u = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ est l'affixe du point N' symétrique de N par rapport à l'axe réel (facile à voir) et $\omega = \frac{1}{1-re^{i\theta}}$ est simplement $2\overline{u'} = 2u = 1 + i$ (affixe de Ω).

Le point M_n s'obtient à partir de M_{n-1} en construisant le triangle $\Omega M_{n-1} M_n$ isocèle de base ΩM_{n-1} et rectangle en M_n de telle sorte que la base $(\overrightarrow{\Omega M_{n-1}}, \overrightarrow{\Omega M_n})$ soit directe. (Voir sur le dessin qui suit comment on construit M_2 à partir de M_1 et M_3 à partir de M_2 en passant à chaque fois par le point Ω.)

Pour le placement des points M_n avec $0 \leq n \leq 8$ voir la question 3 ainsi que la figure qu'on a dessinée à cet effet.



Exercice 5

Pour tout nombre complexe z, on désigne par $|z|$ son module et $\text{Arg}(z)$ son argument. On note Ω l'ouvert :

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z - i) < \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

(Il est conseillé de dessiner cet ouvert.)

Quelle est l'image Ω' de l'ouvert Ω par l'homographie $h : z \longmapsto z' = -\frac{z+1}{z-1}$?

Solution

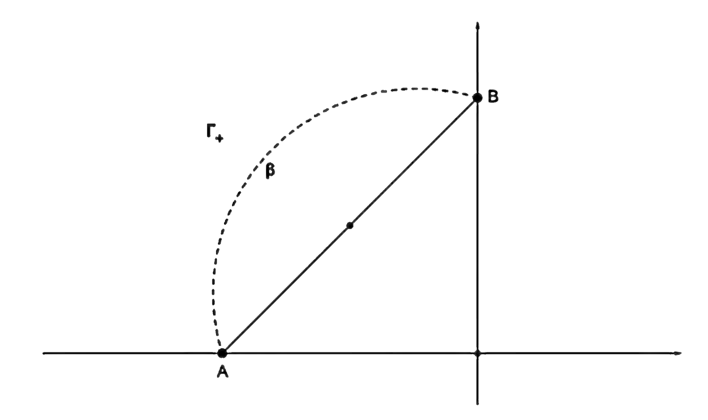
De la relation $z' = -\frac{z+1}{z-1}$ on déduit $z = \frac{z'-1}{z'+1}$. Ce qui donne $z - i = (1-i)\frac{i-z'}{(-1)-z'}$. Pour $z \neq i$, notons θ l'argument de $(z-i)$. On a $\theta = \mathrm{Arg}(1-i) + \mathrm{Arg}\left(\frac{i-z'}{(-1)-z'}\right)$, c'est-à-dire :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Arg}(i-z') - \mathrm{Arg}((-1)-z') = \theta + \frac{\pi}{4}.$$

Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et i ; M' étant le point d'affixe z'. La relation (1) est équivalente à :

$$\text{(2)} \qquad \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \theta + \frac{\pi}{4}.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \frac{\pi}{2}$; le point M' varie alors sur le demi-cercle Γ_+ de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et du côté de la droite (AB) qui ne contient pas l'origine. De la même manière, pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$, on a $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) = \pi$; donc le point M' varie sur le segment ouvert $]AB[$. Pour une valeur de θ telle que $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, on a $\frac{\pi}{2} < \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) < \frac{3\pi}{4}$, et donc le point M' varie sur l'arc de cercle β (voir dessin ci-dessous) privé de A et B. On en déduit finalement que le point M' varie sur le demi-disque ouvert délimité par le demi-cercle Γ_+ et le segment $[AB]$; c'est l'image de Ω par l'homographie h.



Exercice 6

Trouver les figures transformées des figures suivantes par l'application $\mathcal{I}$ qui au point $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ associe le point $w = \frac{1}{z} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1 - Le cercle γ d'équation $|z-1| = 1$.

2 - Le cercle Γ d'équation $|z-2| = 1$.

3 - La famille de toutes les droites parallèles à la première bissectrice.

Solution

Remarquons tout d'abord que l'application $\mathcal{I}$ est l'inversion de pôle l'origine O et de puissance 1. Elle transforme droites Δ et cercles Γ comme suit.

i) Elle laisse globalement invariante toute droite Δ qui passe par O.

ii) Si Δ est une droite qui ne passe pas par O, $\mathcal{I}$ la transforme en le cercle Γ de diamètre OH' où H' est l'image par $\mathcal{I}$ de la projection orthogonale H de O sur Δ.

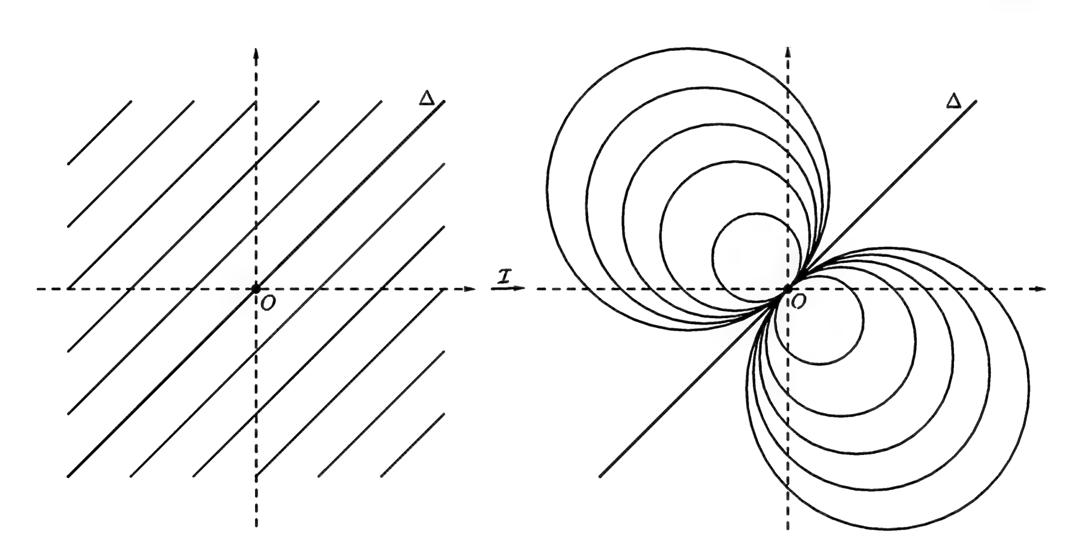
iii) Tout cercle Γ passant par O est transformé en la droite Δ passant par H' où H' est l'image du point H diamétralement opposé à O.

iv) Tout cercle Γ centré en α et ne passant pas par O est transformé en un cercle Γ' dont le centre α' est sur la droité $(O\omega)$.

1 - Le cercle Γ a pour équation $|z-1| = 1$ et il passe par le pôle de l'inversion O. Son image est donc une droite Δ orthogonale à la droite OH où H est le point d'affixe 2. Pour déterminer complètement Δ il suffit de calculer l'image H' de H par $\mathcal{I}$. Mais il est immédiat de voir que H' a pour affixe $\frac{1}{2}$. Donc Δ a pour équation $w + \overline{w} = 1$.

2 - Le cercle Γ a cette fois-ci pour équation $|z-2| = 1$; son centre est le point α d'affixe 2. Il ne passe pas par O et se transforme donc en un cercle Γ' dont le centre α' est sur la droite (OA). Pour déterminer complètement Γ' il suffit de connaître les images A' et B' des points $A = 1$ et $B = 3$ (qui sont sur Γ). Mais on a immédiatement $A' = 1$ et $B' = \frac{1}{3}$. Don Γ' est le cercle de centre $\alpha = \frac{A'+B'}{2} = \frac{2}{3}$ et de rayon $\frac{1}{3}$.

3 - On note $\mathcal{F}$ la famille des droites parallèles à la première bissectrice Δ. La droite Δ passe par O ; elle se confond donc avec son image. Soit Δ_1 une droite de la même famille, distincte de Δ ; elle ne passe pas par O et se transforme donc en un cercle Γ_1. Soient H le projeté orthogonal de O sur Δ_1 et H' l'image de H par $\mathcal{I}$. Alors le cercle Γ_1 passe par O et a OH' pour diamètre. Pour le reste, regarder simplement la figure ci-dessous : à gauche la famille $\mathcal{F}$ des droites parallèles à Δ et à droite la famille $\mathcal{F}'$ de leurs transformées.



CHAPITRE VI

SINGULARITÉS ET RÉSIDUS

1. Séries de Laurent

Nous commencerons par donner la définition générale d'une telle série. Ensuite nous verrons dans quelles conditions une fonction analytique en admet une et comment la déterminer.

La proposition qui suit est immédiate à démontrer.

1.1. Proposition. *Considérons la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$. *Alors il existe* $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *(qu'on peut calculer à l'aide de la formule de Hadamard par exemple) tel que :*

i) *Si* $\ell = 0$, *la série converge absolument pour tout* z *sauf au point* $z = z_0$.
ii) *Si* $0 < \ell < +\infty$, *la série converge pour* $|z - z_0| > \ell$ *et diverge pour* $|z - z_0| < \ell$.
iii) *Si* $\ell = +\infty$, *la série diverge pour tout* z.

Si $0 \leq \ell < +\infty$, la série est uniformément convergente sur tout disque fermé de l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \ell\}$. Elle définit donc une fonction holomorphe sur Ω.

On appelle *série de Laurent* une série du type $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Elle est la somme des deux séries :

$$\text{(VI.1)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^{-m}}.$$

Elle est convergente si, et seulement si, les deux séries (VI.1) le sont. La première, appelée *partie régulière* est une série de Taylor ayant un rayon de convergence R. La deuxième est appelée *partie principale* et converge pour $|z - z_0| > r$. La série de Laurent converge alors uniformément sur tout compact contenu dans la *couronne* :

$$\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

lorsque évidemment $r < R$. La somme y définit alors une fonction holomorphe :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Pour $|z - z_0| > R$ ou $|z - z_0| < r$ l'une des deux séries diverge et l'autre converge, donc la série de Laurent diverge.

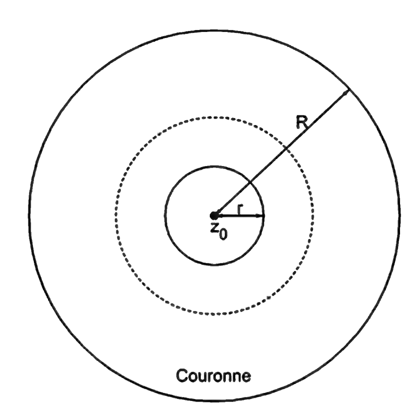
1.2. Proposition. *Soit* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur une couronne (ouverte)* $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. *Alors* f *y admet un développement de Laurent :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z-z_0)^n$$

avec :

(VI.2)
$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

où γ_ρ est le cercle centré en z_0 et de rayon ρ avec $r < \rho < R$.



La démonstration est laissée au lecteur : à peu de choses près, elle est similaire à celle du théorème IV.4.1.

1.3. Exemple

On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$. Elle est définie et holomorphe sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$. Cherchons son développement de Laurent au voisinage de chacun des points $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$. On a :

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{pour} \quad 0 < |z| < 1$$

et :

$$f(z) = \frac{1}{1+(z-1)} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad \text{pour} \quad 0 < |z-1| < 1.$$

2. Singularités

Soient z_0 un point de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de z_0 sauf peut-être en z_0. On dira alors que z_0 est un *point singulier isolé* de f. Pour r suffisamment petit, f admet un développement de Laurent sur la couronne $0 < |z - z_0| < r$:

(VI.3)
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n (z - z_0)^n.$$

Il y a trois possibiltés :

• Les coefficients f_n sont nuls pour $n < 0$. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité apparente.*

• Il n'y a qu'un nombre fini de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est un *pôle* de f. Le plus grand $n \geq 1$ tel que $f_{-n} \neq 0$ est un entier naturel m appelé *ordre* du pôle z_0. Si $m = 1$ on dira que z_0 est un *pôle simple* de f.

• Il y a une infinité de coefficients f_n avec $n < 0$ qui sont non nuls. Dans ce cas on dira que z_0 est une *singularité essentielle.*

2.1. Singularité apparente

Si z_0 est une singularité apparente de f, la série donnée par (VI.3) est en fait une série de Taylor ordinaire dont la somme $h(z)$ est holomorphe sur tout le disque $|z - z_0| < r$. On prolonge donc f en z_0 en posant $f(z_0) = h(z_0)$. Donc la fonction f, a priori définie uniquement sur le disque épointé $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$, est en réalité définie sur tout le disque ; c'est en ce sens qu'on dit que la «singularité z_0 est apparente ». Un exemple simple est celui de la fonction $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ définie a priori sur $\mathbb{C}^*$ et qui se prolonge en 0 par $f(0) = 1$.

2.2. Pôle

Comme on l'a dit, si z_0 est un pôle, la série (VI.3) ne contient qu'un nombre fini de termes $(z - z_0)^n$ avec exposant négatif. Soit m l'ordre de ce pôle. On a :

$$f(z) = \frac{f_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^n$$

avec $f_{-m} \neq 0$. En multipliant les deux membre par $(z - z_0)^m$ on obtient :

$$(z - z_0)^m f(z) = f_{-m} + f_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + f_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z - z_0)^{n+m}.$$

On voit donc que z_0 est une singularité apparente de la fonction $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ et que $\lim_{z \to z_0} g(z) = f_{-m}$ et par suite :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f_{-m}}{(z - z_0)^m} = \infty$$

ce qui signifie que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand z tend vers z_0. Les assertions qui suivent ne sont pas difficiles à étabir.

i) *Si f est holomorphe sur un disque $D(z_0, r)$ avec z_0 comme seul zéro de multiplicité m, la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$ sauf en z_0 qui est un pôle d'ordre m.*

ii) *Si f est holomorphe sur un disque $D(z_0, r)$ sauf en z_0 qui est un pôle isolé d'ordre m, la fonction $\frac{1}{f}$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$ avec z_0 comme zéro de multiplicité m.*

Définition. *Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite* **méromorphe** *s'il existe un ensemble discret Σ de U tel que f est holomorphe sur $U\backslash\Sigma$ et tout point de Σ est un pôle de f.*

Par exemple, si f et g sont deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ le quotient $\frac{f}{g}$ est une fonction méromorphe ; ses pôles sont les zéros de g.

Il n'y a aucune restriction sur les pôles comme le décrit le *Théorème de Mittag-Leffler*, l'un des plus importants dans la théorie des fonctions d'une variable complexe. Le voici sous une version simple.

Théorème de Mittag-Leffler. *Soit $(z_k)_{k\geq 1}$ une suite discrète dans $\mathbb{C}$ et $(m_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers naturels. Alors il existe une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant $z_1, \cdots, z_k, \cdots$ comme pôles d'ordres respectifs $m_1, \cdots, m_k, \cdots$.*

Il est donc possible de prescrire les pôles et leurs ordres respectifs. (On peut trouver la preuve de la version générale de ce théorème dans [Hö] par exemple.)

2.3. Singularité essentielle

Les fonctions ayant de telles singularités existent bien. Par exemple la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ a pour développement de Laurent :

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots$$

qui montre bien que $z_0 = 0$ est un point singulier essentiel de f.

L'importance de la notion est par exemple illustrée par les deux théorèmes qui suivent qui montrent à quel point l'image par la fonction d'un voisinage arbitraire d'une singularité essentielle peut remplir l'espace $\mathbb{C}$.

Théorème de Weierstrass. *Soit $f : D(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur le disque ouvert $D(z_0, r)$ sauf en z_0 qui est une singularité essentielle. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ (avec $\varepsilon < r$), l'image par f du disque épointé $D(z_0, \varepsilon)\backslash\{z_0\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

(Voir [Ca1] pour la preuve.) Encore plus fort est le :

Théorème de Picard. *Soit z_0 une singularité essentielle d'une fonction f holomorphe sur un disque ouvert épointé $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ (avec $\varepsilon < r$), l'image par f du disque épointé $D(z_0, \varepsilon)\backslash\{z_0\}$ est $\mathbb{C}$ tout entier ou $\mathbb{C}$ privé d'un point.*

À titre d'exercice, on peut vérifier le théorème de Weierstrass sur la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en se donnant $w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ et en cherchant une suite explicite z_n dans $D(0, \varepsilon)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

Si $w = 0$, la suite $z_n = -\frac{\varepsilon}{n}$ répond à la question. En effet $f(z_n) = e^{-\frac{n}{\varepsilon}}$ tend vers 0. Désormais, on supposera $w \neq 0$. On peut donc écrire $w = re^{i\theta}$ avec $r = |w| > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (argument de w).

• On a $e^{\frac{1}{z}} = e^{\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right)} = e^{\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right)} = e^{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)} \cdot e^{\left(-i\frac{y}{x^2+y^2}\right)}$. Pour ne pas trainer de grosses expressions, on pose $\alpha = \frac{x}{x^2+y^2}$ et $\beta = -\frac{y}{x^2+y^2}$. On va chercher notre suite (z_n) dans la courbe $z(t) = t + i\sqrt{\lambda t}$ où λ est un réel strictement positif (qu'on déterminera après) et le paramètre t varie dans $\mathbb{R}_+^*$. On a alors :

$$\alpha(t) = \frac{t}{t^2 + \lambda t} = \frac{1}{t + \lambda} \qquad \text{et} \qquad \beta(t) = -\frac{\sqrt{\lambda t}}{t^2 + \lambda t} = \frac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{t}(t + \lambda)}.$$

On voit alors que $\alpha(t)$ tend vers $\frac{1}{\lambda}$ lorsque t tend vers 0. Il suffit donc de choisir $\lambda = \frac{1}{\ln(r)}$ pour que cette limite soit $r = |w|$.

• Quant à la fonction $\beta(t)$, elle est strictement croissante et tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers 0. Donc l'image de $\mathbb{R}_+^*$ par la fonction β est l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$. Comme l'argument θ de w est défini à une constante additive près du type $2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$, on peut en fait supposer que $\theta \in]-\infty, 0[$.

• On va construire notre suite z_n de façon à ce que la suite $w_n = f(z_n)$ soit sur la demi-droite qui part de 0 et qui passe par le point $e^{i\theta}$ et converge vers le point $w = re^{i\theta}$ qu'on s'est donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $t_n \in \mathbb{R}_+^*$ de telle sorte qu'on ait à la fois $\beta(t_n) = \theta - 2\pi n$ et $|z(t_n)| = \sqrt{t_n^2 + \lambda t_n} < \varepsilon$. Comme $\beta(t_n)$ tend vers $-\infty$ et que β est strictement croissante, la suite t_n tend nécessairement vers 0.

• On a bien évidemment $e^{i\beta(t_n)} = e^{i(\theta - 2\pi n)} = e^{i\theta}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\alpha(t_n)} = r$, on a pour finir :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{\alpha(t_n)} \cdot e^{i\beta(t_n)} = re^{i\theta} = w.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. □

On a ainsi établi que l'image par f de tout disque épointé $D(0, \varepsilon)\backslash\{0\}$ est dense dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$.

3. Résidus

C'est une notion très importante. Nous allons l'introduire ainsi que quelques-unes de ses applications. Nous montrerons notamment comment elle est utilisée dans le calcul effectif de certaines intégrales de fonctions d'une variable réelle.

Soit f une fonction holomorphe sur une couronne $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$ ayant le point z_0 comme singularité (apparente, pôle ou essentielle). Soient $\rho \in]0, r[$ et γ_ρ le cercle de centre z_0 et de rayon ρ. Alors f se développe en série de Laurent sur $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$:

$$f(z) = \cdots + \frac{f_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{z - z_0} + f_0 + f_1(z - z_0) + \cdots + f_n(z - z_0)^n + \cdots$$

Comme cette série converge uniformément sur le compact γ_ρ (image du chemin γ), on peut l'intégrer terme à terme sur γ_ρ ; on obtient :

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \int_{\gamma_\rho} (z - z_0)^n dz.$$

Un calcul simple (qu'on a déjà fait) montre que tous les termes de cette série d'intégrales sont nuls sauf $\int_{\gamma_\rho} \frac{f_{-1}dz}{z - z_0} = 2i\pi f_{-1}$. Donc :

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = 2i\pi f_{-1}.$$

3.1. Définition. *On appelle* **résidu** *de f au point z_0 et on note* Rés(f, z_0) *le coefficient f_{-1} du développement de Laurent de f au point z_0.*

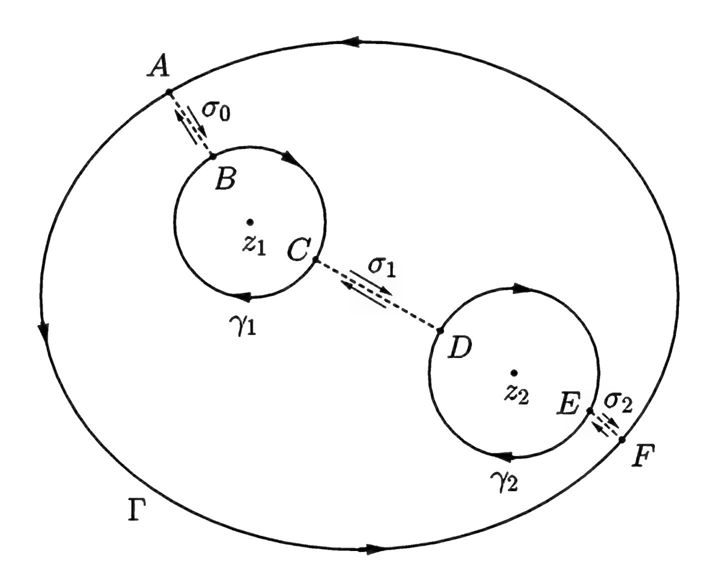
Nous sommes en mesure maintenant de donner le théorème des résidus. C'est ce qui reste comme souvenir à toute personne ayant suivi un cours de variable complexe !

3.2. Théorème des résidus. *Soit f une fonction sur un voisinage de l'adhérence $\overline{\Omega}$ d'un ouvert borné Ω, holomorphe sauf en un nombre fini de points $z_1, \cdots, z_k$ qui sont des pôles. On suppose que Ω est délimité par un chemin fermé Γ simple (sans auto-intersection) et C^1 par morceaux. Alors :*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{k} \text{Rés}(f, z_j). \tag{VI.4}$$

Démonstration. Soient $r > 0$ et, pour chaque $j = 1, \cdots, k$, soit γ_j le cercle de centre z_j et de rayon r ; on choisit r suffisamment petit pour que tous les cercles γ_j soient contenus dans Ω et que deux quelconques d'entre eux ne se coupent pas. Soient σ_0 un chemin simple dans $\overline{\Omega}$ joignant un point de Γ à un point de γ_1, σ_1 un chemin simple dans Ω joignant un point de γ_1 à un point de $\gamma_2, \cdots$, σ_{k-1} un chemin simple dans Ω joignant un point de γ_{k-1} à un point de γ_k et σ_k un chemin simple dans Ω joignant un point de γ_k à un point de Γ. Le dessin qui suit visualise la situation lorsque $k = 2$.

On note K le compact obtenu en ôtant de $\overline{\Omega}$ les intérieurs des disques délimités par les cercles $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$. On oriente alors les chemins $\Gamma, \gamma_1, \cdots, \gamma_k$ de telle sorte que lorsqu'on se déplace sur chacun d'eux le compact K se retrouve à notre gauche. (On peut sûrement mieux faire en ayant recours à une définition plus formelle et plus « mathématique » mais cette convention nous suffit largement !)



On décompose alors $\Lambda = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k$ en deux chemins fermés simples et C^1 par morceaux Γ_1 et Γ_2. Expliquons comment on fait dans le cas $k = 2$ en se référant au dessin. On convient que l'orientation positive sur le chemin σ_0 est de A vers B, sur σ_1 de C vers D et sur σ_2 de E vers F.

Pour obtenir Γ_1 :

- on part du point A,
- on va vers B en parcourant σ_0 (décrit dans le sens positif),
- de B vers C sur γ_1,
- de C vers D sur σ_1 (décrit dans le sens positif),
- de D vers E sur γ_2,
- de E vers F sur σ_2 (décrit dans le sens positif) et enfin
- de F vers A sur Γ.

Pour obtenir Γ_2 :
- on part du point A,
- on va vers F en parcourant Γ,
- de F vers E sur σ_2^{-1} (σ_2 décrit dans le sens négatif),
- de E vers D sur γ_2,
- de D vers C sur σ_1^{-1} (σ_1 décrit dans le sens négatif),
- de C vers B sur γ_1 et enfin
- de B vers A sur σ_0^{-1} (σ_0 décrit dans le sens négatif).

Pour chaque $\ell = 0, 1, \cdots, k$ on a $\int_{\sigma_\ell^{-1}} f(z)dz = -\int_{\sigma_\ell} f(z)dz$. D'autre part la fonction f étant holomorphe à l'intérieur de chacun des domaines délimités par Γ_1 et Γ_2, par le théorème de Cauchy on a :

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0.$$

Par suite :

$$0 = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Mais l'intégrale $\int_{\gamma_j} f(z)dz$ vaut $2i\pi \text{Rés}(f, z_j)$. On a donc :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{k} \text{Rés}(f, z_j).$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. □

4. Calcul d'intégrales

Le théorème des résidus admet de multiples applications. L'une des plus connues est celle qui l'utilise pour calculer explicitement certaines intégrales de fonctions d'une variable réelle comme nous l'avons déjà dit. Nous nous limiterons à traiter deux exemples en détail. Mais avant, donnons quelques indications pour calculer le résidu en un pôle.

4.1. Soit z_0 un pôle d'ordre m d'une fonction f. Alors au voisinage de ce point on a le développement de Laurent :

$$f(z) = \frac{f_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{f_{-1}}{z - z_0} + f_0 + f_1(z - z_0) + \cdots + f_n(z - z_0)^n + \cdots$$

et donc :

$$(z-z_0)^m f(z) = f_{-m}+f_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+f_{-1}(z-z_0)^{m-1}+f_0(z-z_0)^m+f_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

On dérive les deux membres $(m-1)$ fois et on obtient :

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = (m-1)!f_{-1} + \frac{m!}{1!}f_0(z-z_0) + \frac{(m+1)!}{2!}f_1(z-z_0)^2 + \cdots$$

On prend la limite des deux membres lorsque z tend vers z_0 et on obtient :

$$\text{(VI.5)} \qquad \text{Rés}(f, z_0) = f_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

Lorsque le pôle z_0 est simple *i.e.* $m = 1$, on a au voisinage de z_0 (en dehors de z_0 bien sûr) :

$$f(z) = \frac{f_{-1}}{(z-z_0)} + f_0 + f_1(z-z_0) + \cdots$$

D'où :

$$(z-z_0)f(z) = f_{-1} + f_0(z-z_0) + f_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Par suite :

$$\text{(VI.6)} \qquad \text{Rés}(f, z_0) = f_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Ceci devient encore plus simple si $f(z) = \frac{a(z)}{b(z)}$ avec $b(z_0) = 0$, $a(z_0) \neq 0$ et $b'(z_0) \neq 0$. On trouve (le lecteur fera les calculs) :

$$\text{(VI.7)} \qquad \text{Rés}(f, z_0) = f_{-1} = \frac{a(z_0)}{b'(z_0)}.$$

4.2. Premier exemple

Soit à calculer l'intgrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$. Le fait qu'elle existe effectivement est un exercice facile laissé au soin du lecteur !

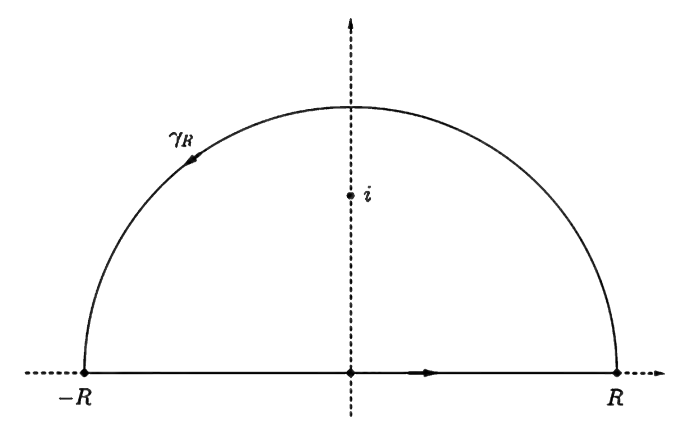
Considérons la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. Elle est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-i, i\}$. Les points $-i$ et i sont des pôles d'ordre 3. (On n'utilisera en fait que le pôle $z_0 = i$.) En utilisant la formule (VI.5) on trouve :

$$\begin{aligned}\text{Rés}(f, i) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-i)^3 f(z)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)\right]_{z=i}\\ &= -\frac{3i}{16}.\end{aligned}$$

Le chemin fermé Γ auquel on va appliquer le théorème des résidus sera le suivant. Soit $R > 1$; on part du point de coordonnées $(-R, 0)$ et on parcourt l'axe réel jusqu'au point

de coordonnées $(R, 0)$ ensuite on décrit le demi-cercle γ_r de rayon R dans le demi-plan supérieur pour revenir au point $(-R, 0)$. L'intérieur du chemin est un ouvert qui contient le pôle i. D'après le théorème des résidus on a :

(VI.8) $$\int_\Gamma f(z) = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \text{Rés}(f, i) = \frac{3\pi}{8}.$$



Mais sur le cercle γ_R on a :

$$\frac{1}{|z^2+1|} = \frac{1}{|z^2-(-1)|} \leq \frac{1}{||z^2|-1|} = \frac{1}{R^2-1}.$$

D'où :

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^3}$$

et donc :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

D'après (VI.8) en prenant la limite pour R tendant vers l'infini, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

4.3. Deuxième exemple

L'intégrale :

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}$$

existe bien. Calculons-la en utilisant le théorème des résidus. Comme la fonction à intégrer est paire, son intégrale est égale à la moitié de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}.$$

On considère la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$. Elle est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-i, i\}$ et les points $-i$ et i en sont des pôles simples. La fonction f est de la forme $\frac{a(z)}{b(z)}$ avec $a(i) = e^{-1} \neq 0$ et $b'(i) = 2i \neq 0$; en vertu de la formule (VI.7), on a :

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{a(i)}{b'(i)} = \frac{1}{2ie}.$$

On reprend le chemin Γ de l'exemple qui précède. En appliquant le théorème des résidus on obtient :

$$\int_\Gamma f(z) = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi\text{Rés}(f,i) = \frac{\pi}{e}$$

c'est-à-dire :

$$\text{(VI.9)} \qquad \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}dx + \Re\left(\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz\right) = \frac{\pi}{e}.$$

Sur le cercle γ_R on a $|e^{iz}| \leq e^{-y}$ où y est la partie imaginaire de z. D'où :

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}$$

et donc :

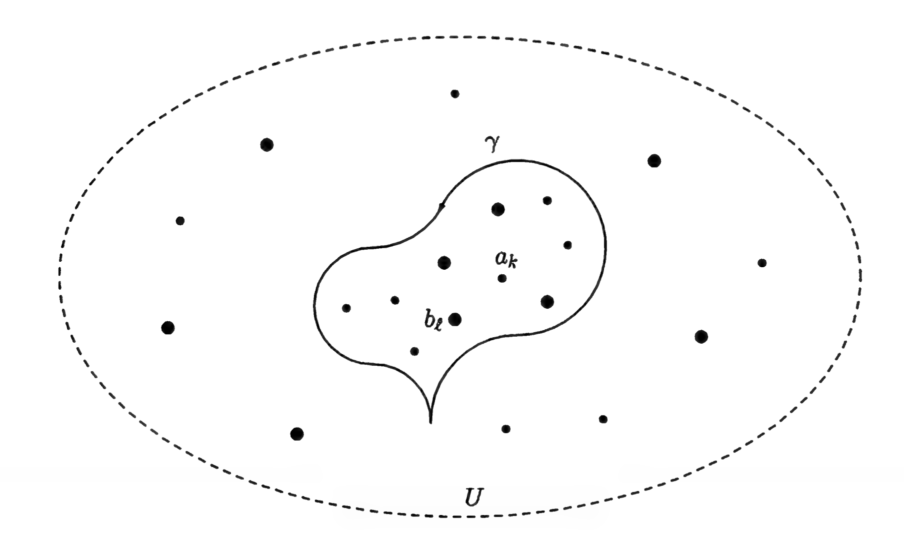
$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| = 0.$$

L'égalité (VI.9) nous donne alors :

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e}.$$

5. Principe de l'argument

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe. On sait que l'ensemble $\mathcal{Z} = \{a_k\}$ des zéros de f et celui $\mathcal{P} = \{b_\ell\}$ de ses pôles sont des parties dénombrables et discrètes de U. Par suite, tout compact K de U ne contient qu'une partie finie $\{a_1, \cdots, a_n\}$ de $\mathcal{Z}$ et une partie finie $\{b_1, \cdots, b_p\}$ de $\mathcal{P}$. C'est le cas, en particulier, de l'intérieur Δ d'un chemin fermé simple (orienté positivement) γ qui n'intersecte pas $\mathcal{Z} \cup \mathcal{P}$ (voir dessin ci-dessous : les petits points sont les zéros et les gros points sont les pôles).



On note m_k la multiplicité du zéro a_k et o_ℓ l'ordre du pôle b_ℓ. Ces deux nombres sont des entiers positifs. Sur Δ on peut écrire la fonction f sous la forme :

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{p} (z - b_\ell)^{-o_\ell} \varphi(z)$$

où φ est une fonction qui n'a ni pôle (donc holomorphe) ni zéro dans l'ouvert Δ. On dérive f suivant les règles habituelles ; on obtient :

$$\begin{aligned} f'(z) = & \left(\sum_{k=1}^{n} m_k (z - a_k)^{m_k - 1} \prod_{j \neq k}^{n} (z - a_j)^{m_j} \right) \prod_{\ell=1}^{p} (z - b_\ell)^{-o_\ell} \varphi(z) \\ & - \prod_{j=1}^{n} (z - a_k)^{m_k} \left(\sum_{\ell=1}^{p} o_\ell (z - b_\ell)^{-o_\ell - 1} \prod_{s \neq \ell}^{n} (z - b_s)^{o_s} \right) \varphi(z) \\ & + \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{p} (z - b_\ell)^{-o_\ell} \varphi'(z). \end{aligned}$$

Par suite :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{z - z_k} - \sum_{\ell=1}^{p} \frac{o_\ell}{z - z_\ell} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

En intégrant les deux membres sur le chemin γ (qu'on supposera homotope à un point) et en tenant compte du fait que $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est holomorphe sur Δ, on obtient :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} m_k I(\gamma, a_k) - \sum_{\ell=1}^{p} o_\ell I(\gamma, b_\ell).$$

En fait, cette somme peut être remplacée par celle portant sur tous les zéros a_k et tous les pôles b_ℓ puisque $I(\gamma, a_k) = I(\gamma, b_\ell) = 0$ si $a_k, b_\ell \notin \Delta$. On a donc le :

5.1. Théorème. *Les données étant celles qu'on vient de préciser. Pour tout chemin γ de $U \backslash (\mathcal{Z} \cup \mathcal{P})$ fermé simple, orienté positivement et homotope à un point, on a :*

(VI.10) $$\sum_{z_k \in \mathcal{Z}} m_k I(\gamma, a_k) - \sum_{b_\ell \in \mathcal{P}} o_\ell I(\gamma, b_\ell) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

(*La somme est en fait finie car elle ne porte que sur les zéros et les pôles qui sont enfermés par le chemin γ.*)

On supposera dans toute la suite de cette section que f est holomorphe sur U, et donc que l'ensemble $\mathcal{P}$ de ses pôles est vide : on ne garde que l'ensemble de ses zéros $\mathcal{Z} = \{a_k\}$.

Soit $c \in f(U)$ et notons $\mathcal{S}_c = \{a_k\}$ l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = c$; ce ne sont rien d'autre que les zéros de la fonction $\psi(z) = f(z) - c$. En appliquant la formule (VI.10) en intégrant sur le chemin Γ, image par f de γ, on obtient :

$$I(\Gamma, c) = \sum_{a_k} m_k I(\gamma, a_k) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - c}$$

Deux valeurs c et c' de la fonction f qui se situent dans une même région déterminée par le chemin Γ sont telles que $I(\Gamma, c) = I(\Gamma, c')$. Donc :

$$\text{(VI.11)} \qquad \sum_{a_k} m_k I(\gamma, a_k) = \sum_{a'_k} m'_k I(\gamma, a'_k)$$

où m'_k est la multiplicité du zéro a'_k de $f(z) - c'$. Prenons pour γ un cercle de rayon $\varepsilon > 0$ de telle sorte que son centre soit un zéro a_k de ψ et que le disque ouvert $D = \{z : |z - a_k| < \varepsilon\}$ ne contienne aucun autre zéro. On a évidemment $I(\gamma, a_k) = 1$ et $m_k = m'_k$ pour $c, c' \in D$. À partir de tout cela, on déduit facilement le :

5.2. Théorème. *Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point $a \in \mathbb{C}$ qu'on suppose être un zéro d'ordre n de la fonction $\psi(z) = f(z) - c$. Alors pour un réel $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout w vérifiant $|w - c| < \eta$, l'équation $f(z) = w$ possède exactement n solutions dans le disque ouvert $\{z : |z - a| < \varepsilon\}$.*

Le contenu de ce théorème permet d'établir une propriété extêmement importante en théorie des fonctions d'une variable complexe. Elle s'exprime dans le corollaire qui suit.

5.3. Corollaire. *Une fonction holomorphe $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application ouverte, c'est-à-dire elle envoie un ouvert de U sur un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Le théorème 5.1 est connu sous le nom de *principe de l'argument.* Il a l'interprétation géométrique intéressante qui suit. Notons toujours Γ l'image de γ par la fonction f. C'est le chemin $\Gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ paramétré par $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$. Posons :

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} m_k I(\gamma, a_k), \quad \nu = \sum_{\ell=1}^{p} o_\ell I(\gamma, b_\ell) \quad \text{et} \quad w = f(z) \quad \text{pour } z \in U.$$

On a alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Cette égalité signifie que lorsque t parcourt l'intervalle $[0, 1]$, le chemin fermé Γ tourne autour de l'orignie μ fois dans le sens positif et ν fois dans le sens négatif.

Une autre application du théorème 5.1 est donnée par le corollaire qui suit, bien connu en fait sous le nom de :

5.4. Théorème de Rouché. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et γ un chemin fermé dans U tel que l'indice $I(\gamma, z)$ soit 0 ou 1 pour tout $z \in U \backslash \gamma$. Soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes telles que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ pour tout z sur γ. Alors f et g ont le même nombre de zéros à l'intérieur de γ.*

Démonstration. L'inégalité $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ implique que ni f ni g n'ont de zéro sur le chemin γ. En divisant ses deux membres par $|f(z)|$ on obtient donc :

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1 \quad \text{pour tout } z \in \gamma.$$

Posons $\Phi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$. Alors les zéros de Φ sont ceux de f et les pôles de Φ sont les zéros de g. En plus, l'inégalité ci-dessus dit que Φ est à valeurs dans le disque ouvert de centre le point $z_0 = 1$ et de rayon 1. Donc le chemin fermé $\Gamma = \Phi \circ \gamma$ ne passe pas par 0 et ne contient pas 0 dans son intérieur. Par suite, d'après le théorème 5.1 :

$$\sum_{z_k \in \mathcal{Z}} I(\gamma, a_k) - \sum_{b_\ell \in \mathcal{P}} I(\gamma, b_\ell) = I(\Gamma, 0) = 0$$

où les a_k sont les zéros de Φ donc de f et les b_ℓ sont les pôles de Φ donc les zéros de g. Ce qui termine la démonstration. □

Terminons par le théorème qui suit, très utile dans certaines situations (on en trouve par exemple dans Complément 2).

5.5. Théorème de prolongement de Riemann. *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, z_0 un point de U et f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. Supposons f bornée sur un disque épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ contenu dans U. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur U tout entier.*

Démonstration. Comme f est bornée sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, on a $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$. Soit $g : D(z_0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Cette fonction est holomorphe sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. D'autre part, pour $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, on a :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

Ceci montre que g est holomorphe en z_0 (de dérivée nulle) et donc sur $D(z_0, r)$; par suite elle y admet un développement en série entière :

$$g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$$

Mais $a_0 = g(z_0) = 0$ et $a_1 = g'(z_0) = 0$. Ceci donne $f(z) = a_2 + a_3(z - z_0) + \cdots$ sur $D(z_0, r)$ et montre que f est holomorphe sur $D(z_0, r)$. Ainsi f s'étend en une fonction holomorphe sur tout l'ouvert U. □

EXERCICES RÉSOLUS

Exercice 1

1 - Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

On se propose de calculer I. À cet effet, on considère la fonction h qui à z associe la quantité $h(z) = \frac{e^{iz}}{z}$.

2 - Pour quelles valeurs de z la fonction h est-elle définie et holomorphe ? Calculer l'intégrale de h sur le chemin Γ défini comme suit : on se donne deux nombres réels $R > r > 0$; on décrit l'axe réel du point $(-R, 0)$ au point $(-r, 0)$, le demi-cercle γ_r (situé sur le demi-plan supérieur) de rayon r du point $(-r, 0)$ au point $(r, 0)$, l'axe réel du point $(r, 0)$ au point $(R, 0)$ et enfin le demi-cercle γ_R (situé sur le demi-plan supérieur) de rayon R du point $(R, 0)$ au point $(-R, 0)$.

3 - Montrer que $\lim\limits_{R\to+\infty} \displaystyle\int_{\gamma_R} h(z)dz = 0$ et $\lim\limits_{r\to 0} \displaystyle\int_{\gamma_r} h(z)dz = -i\pi$.

Indication pour la première : *Intégrer par parties comme pour les intégrales des fonctions d'une variable réelle.*

4 - Déduire des questions 2 et 3 la valeur exacte de l'intégrale I.

Solution

1 - La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$; sa limite quand $x \to 0$ vaut 1 ; elle se prolonge donc par continuité en 0 et définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par conséquent le problème de l'existence de l'intégrale en question ne se pose qu'à l'infini. On va montrer que cette intégrale converge en utilisant le critère de Cauchy :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } A > 0 \text{ tel que : } x', x'' \geq A \Longrightarrow \left| \int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$; il s'agit de trouver un réel $A > 0$ vérifiant la propriété qu'on vient de mentionner. On transforme $\int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx$ en procédant à une intégration par parties. (Comme le problème se pose au voisinage de $+\infty$, les nombres x' et x'' seront supposés strictement positifs.) À cet effet on pose $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = \sin x$; d'où $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $v(x) = -\cos x$. Ce qui nous donne : $\int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx = \Big[-\frac{\cos x}{x} \Big]_{x'}^{x''} - \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} dx$. D'où :

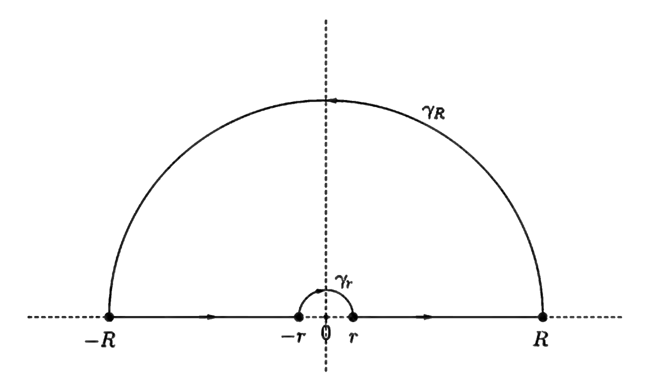
$$\begin{aligned}
\left| \int_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \Big[-\frac{\cos x}{x} \Big]_{x'}^{x''} - \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\
&\leq \left| \Big[-\frac{\cos x}{x} \Big]_{x'}^{x''} \right| + \left| \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \int_{x'}^{x''} \frac{1}{x^2} dx \\
&\leq 2 \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} \right)
\end{aligned}$$

Si on prend n'importe quel $A > \frac{4}{\varepsilon}$ alors clairement la condition $x', x'' \geq A$ implique $2\left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}\right) < \varepsilon$. Ce nombre A répond à la question. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est donc convergente. □

Comme la fonction continue $x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$ est paire, on va calculer plutôt l'intégrale :

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

2 - La fonction $h(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ est définie et holomorphe pour tout point $z \in \mathbb{C}^*$. Elle est donc holomorphe sur l'intérieur du contour Γ. Par conséquent, d'après le théorème de Cauchy $\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.



3 - Pour calculer la première limite on procède par intégration par parties (comme pour les intégrales des fonctions d'une variable réelle). On pose $u'(z) = e^{iz}$ et $v(z) = \frac{1}{z}$; d'où $u(z) = \frac{e^{iz}}{i}$ et $v'(z) = -\frac{1}{z^2}$. Ce qui nous donne :

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \left[\frac{e^{iz}}{iz}\right]_{-R}^{+R} + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{iz^2} dz$$

et donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz\right| &\leq \left|\frac{e^{iR} + e^{-iR}}{iR}\right| + \left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{iz^2} dz\right| \\ &\leq \frac{2}{R} + \left|\int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{iR^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta\right| \\ &\leq \frac{2}{R} + \left|\int_0^\pi \frac{e^{iR\cos\theta}}{Re^{i\theta}} e^{-R\sin\theta} d\theta\right|.\end{aligned}$$

Mais $\sin\theta \geq 0$ pour $0 \leq \theta \leq \pi$; donc $e^{-R\sin\theta} \leq 1$. Ceci nous permet de majorer le deuxième terme du membre de droite et d'avoir finalement l'inégalité :

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz\right| \leq \frac{2+\pi}{R} \quad \text{qui tend vers 0 quand } R \to +\infty.$$

Donc $\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} h(z) dz = 0.$

Pour calculer la deuxième limite, on utilise le développement de Laurent de la fonction h au voisinage de 0 ; on a :

$$h(z) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{iz}{1!} + \cdots + \frac{(iz)^n}{n!} + \cdots\right)$$

qui montre que $h(z) = \frac{1}{z} + \phi(z)$ où ϕ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. On a donc :

$$\int_{\gamma_r} h(z)dz = \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_r} \phi(z)dz.$$

Mais, comme ϕ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est bornée (par une constante $M > 0$) sur un compact contenant γ_r ; donc :

$$\left|\int_{\gamma_r} \phi(z)dz\right| \leq M\left|\int_{\gamma_r} dz\right| = M\left|\int_{\pi}^{0} ire^{i\theta}d\theta\right| = M\pi r \overset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part :

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta = -i\pi.$$

4 - Lorsque le point z est sur l'axe réel, il se réduit à sa partie réelle ; on le notera donc x. On a (en utilisant le résultat de la question 2) :

$$0 = \int_{\Gamma} h(z)dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz.$$

On prend les limites lorsque $R \to +\infty$ et $r \to 0$. Tenant compte des calculs précédemment établis on obtient :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx = i\pi.$$

L'identification des parties réelles et imaginaires des deux membres de cette égalité nous donne finalement $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi$, c'est-à-dire $I = \frac{\pi}{2}$. □

Exercice 2

Soient a, b, c, d quatre nombres complexes tels que $ad - bc = 1$ et $c \neq 0$. Pour tout z dans l'ouvert $U = \mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$ on pose :

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

1 - Dire pourquoi la fonction $h : z \in U \longmapsto h(z) \in \mathbb{C}$ est holomorphe. Quelle est la nature de sa singularité $z_0 = -\frac{d}{c}$? Calculer le résidu de h en z_0.

2 - Déterminer l'image Ω de U par h. Montrer que $h : U \longmapsto \Omega$ est une bijection en déterminant son inverse h^{-1}.

3 - Soit γ le cercle de centre $u \in U$ et de rayon $r > 0$ paramétré par l'application $t \in [0, 1] \longmapsto e^{2i\pi t}$ et ne passant pas par z_0. Caluler l'intégrale :

$$\int_{\gamma} h(z)dz.$$

Solution

1 - La fonction h est une fraction rationnelle ; elle est holomorphe partout où son dénominateur est non nul, c'est-à-dire sur tout l'ouvert U. Un calcul immédiat (*cf.* début du Chapitre IV) nous donne $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{1}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}$. Le point $z_0 = -\frac{d}{c}$ est donc un pôle simple de h et $\text{Rés}(h, z_0) = \frac{1}{c^2}$.

2 - Soit $w \in \mathbb{C}$; peut-on trouver $z \in U$ tel que $h(z) = w$? Si c'est le cas on doit avoir $\frac{az+b}{cz+d} = w$ *i.e.* $(cw - a)z = -dw + b$. Si $w \neq \frac{a}{c}$ on a $z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ et ce point est unique. La fonction h réalise donc une bijection entre U et l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{\frac{a}{c}\}$ d'inverse $h^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$.

3 - Soient $u \in U$ et $\delta(u) = |u - z_0|$. On sait que $r \neq \delta(u)$. Si $r < \delta(u)$, le point z_0 est extérieur au cercle γ et donc $\int_\gamma h(z) = 0$. Supposons $r > \delta(u)$ *i.e.* le point z_0 est intérieur au cercle γ. Donc :

$$\int_\gamma h(z)dz = 2i\pi\text{Rés}(h, z_0) = \frac{2i\pi}{c^2}.$$

Exercice 3

Il s'agit d'une application du théorème de Weierstrass pour la détermination du groupe des automorphismes du plan complexe $\mathbb{C}$.

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. On rappelle que f s'écrit sous forme d'une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à $+\infty$.

On admet le résultat suivant (qui est une conséquence du théorème de Weierstrass) : *Si le cardinal de l'ensembe* $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ *est infini, pour tout* $M > 0$, *l'image de l'ouvert* $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}$ *est une partie dense de* $\mathbb{C}$.

On rappelle aussi qu'on appelle *automorphisme* d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ toute bijection $h : U \longrightarrow U$ telle que h et son inverse h^{-1} soient holomorphes. Le but de cet exercice est de déterminer le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C})$ des automorphismes de $\mathbb{C}$.

1 - Soit $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Montrer que f est une fonction polynôme $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$. (Indication : *utiliser le fait que* $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *et* $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ *sont des ouverts non vides et disjoints.*)

2 - Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{C})$ est constitué des transformations de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

3 - Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{C})$ est le produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ où le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ agit sur le groupe additif $\mathbb{C}$ par homothéties complexes.

4 - Montrer que $\text{Aut}(\mathbb{C})$ est résoluble et non nilpotent.

Solution

1 - Un automorphisme f de $\mathbb{C}$ est avant tout une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Elle se développe donc en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (de rayon de convergence $R = +\infty$). Si le nombre de termes non nuls de cette série était infini, le point infini

serait une singularité essentielle. L'ouvert $V' = f(V)$ serait alors dense dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de Weierstrass. Donc tout point de l'ouvert $U' = f(U)$ serait adhérent à V' ; mais ceci est impossible car U' et V' sont deux ouverts disjoints, tous les deux non vides. Par conséquent f est un polynôme $f(z) = \sum_{k=0}^{k} a_k z^k$.

2 - On vient de voir que tout $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est un polynôme $f(z) = \sum_{k=0}^{k} a_k z^k$. Comme l'application f est bijective, et donc a fortiori injective, ce polynôme doit être du premier degré, c'est-à-dire de la forme $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

3 - Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est constitué des transformations affines du plan complexe $\mathbb{C}$, c'est-à-dire les applications de la forme $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto az + b \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Si l'élément $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est défini par le couple (b, a) et f' par le couple (b', a') alors ff' est défini par le couple $(a'b + b', a'a)$: facile à voir, il suffit de composer les applications f et f' dans l'ordre $f' \circ f$ (faire attention à cela dans la suite des calculs). L'inverse de f est donné par le couple $\left(-\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$.

Le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ agit sur le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ au moyen des homothéties complexes $(a, t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \longmapsto at \in \mathbb{C}$. Cette action permet donc de construire le produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ dans lequel la multiplication est $(b, a) \cdot (b', a') = (a'b + b', a'a)$. On voit donc immédiatement que l'application $\Phi : (b, a) \in \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^* \longmapsto \{z \longmapsto az + b\} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est un homomorphisme bijectif, donc un isomorphisme de $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ sur $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

4 - Montrons que $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est résoluble. Soient $f = (b, a)$ et $f' = (b', a')$ deux éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. On a :

$$(b, a)^{-1} = \left(-\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right) \quad \text{et} \quad (b', a')^{-1} = \left(-\frac{b'}{a'}, \frac{1}{a'}\right)$$

et donc :

$$(b, a)(b', a')(b, a)^{-1}(b', a')^{-1} = \left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'} + \frac{b' - b}{aa'}, 1\right).$$

Ceci montre que le premier groupe dérivé $G_1 = [\mathrm{Aut}(\mathbb{C}), \mathrm{Aut}(\mathbb{C})]$ de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est contenu dans le sous-groupe $\mathbb{C} \times \{1\}$. En fait, il y a égalité car, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda, 1)$ est le commutateur $\left[(-\lambda, 1), (0, \frac{1}{2})\right]$. Comme $G_1 = \mathbb{C} \times \{1\}$ est un groupe abélien, $G_2 = [G_1, G_1]$ est réduit à $(0, 1)$; donc $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est résoluble.

Un calcul similaire au précédent permet de montrer que $G^2 = [G_1, \mathrm{Aut}(\mathbb{C})] = G_1$ et par suite, pour tout $n \geq 1$: $G^n = [G^{n-1}, \mathrm{Aut}(\mathbb{C})] = \cdots = [G_1, \mathrm{Aut}(\mathbb{C})] = G_1$. Comme G_1 n'est pas le groupe trivial, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ n'est pas nilpotent. □

Exercice 4

Soient a et c deux réels strictement positifs tels que $a > c$ et F et F' deux points du plan complexe ayant pour affixes respectifs c et $-c$. On appelle *ellipse* de *foyers* F et F' et de *paramètre* a l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$.

Soit $b \in]0, +\infty[$ tel que $a^2 = b^2 + c^2$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est la courbe fermée ayant pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1 - Montrer que $\mathcal{E}$ est l'image de $[0, 2\pi]$ par l'application $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à t associe le point d'affixe $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$.

2 - Soit Γ le cercle unité, image de $[0, 2\pi]$ par l'application $\sigma : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{it} \in \mathbb{C}$. Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ et $\int_\sigma \frac{dz}{z}$ et en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a\cos t)^2 + (b\sin t)^2}.$$

Solution

1 - Les coordonnées (x, y) d'un point M de l'ellipse $\mathcal{E}$ sont clairement données par $x = a\cos t$ et $y = b\sin t$, c'est-à-dire que M a pour affixe $z = x + iy = a\cos t + ib\sin t$.

2 - L'application $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \longmapsto \mathbb{C}^*$ définie par $H(t, s) = (1 - s)\sigma(t) + s\gamma(t)$ est une homotopie entre les chemins σ et γ (de $\mathbb{C}^*$). Comme la fonction $\frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, on a :

$$\int_\sigma \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Mais $\int_\sigma \frac{dz}{z} = 2i\pi$ (c'est une intégrale qu'on a déjà calculée à plusieurs reprises). Calculons maintenant $\int_\gamma \frac{dz}{z}$. On a :

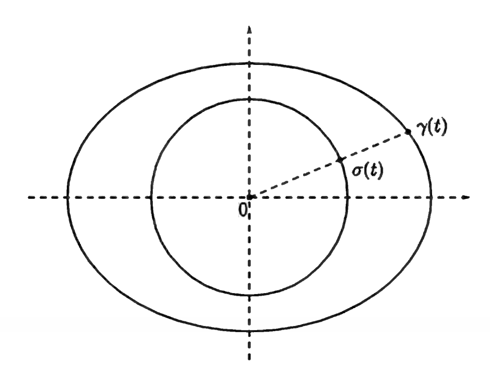
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{\overline{z}dz}{\overline{z}z} = \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t - ib\sin t)(-a\sin t + ib\cos t)}{(a\cos t)^2 + (b\sin t)^2} dt.$$

Ou encore, après séparation des parties réelle et imaginaire :

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \left(-(a^2 + b^2)\int_0^{2\pi} \frac{\cos t \sin t}{(a\cos t)^2 + (b\sin t)^2} dt\right) + i\left(\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a\cos t)^2 + (b\sin t)^2}\right).$$

D'où :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a\cos t)^2 + (b\sin t)^2} = \frac{2\pi}{ab}.$$



COMPLÉMENT 1

LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Tout polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ à coefficients complexes de degré $n > 0$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Il existe beaucoup de démonstrations de ce théorème. Nous en présentons deux ici : la première est une application du *théorème de Liouville* et la deuxième utilise des outils de topologie algébrique et de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe.

1. Première démonstration

Supposons que le polynôme P ne s'annule nulle part. Alors la fonction $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ est holomorphe partout dans $\mathbb{C}$.

Pour $R > 0$, la fonction f est bornée sur le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Et comme $|P(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z| \to +\infty$, le module de f tend vers 0 ; donc f est bornée aussi sur la couronne $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$, par suite f est bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier. Elle est donc constante en vertu du théorème de Liouville ; ce qui n'est pas le cas. L'hypothèse « P ne s'annule nulle part » est donc fausse. Ceci démontre le théorème. □

2. Deuxième démonstration

On écarte le cas $a_0 = 0$ où 0 est une racine évidente ; a_0 sera donc non nul. D'autre part, quitte à diviser tous les coefficients par a_n (qui est non nul car P est de degré n), on peut supposer ce dernier égal à 1.

2.1. L'inégalité qui suit, évidente à établir, sera utile pour la démonstration. On a :

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}|}{|z^n|} = 0.$$

Il existe alors $\alpha > 0$ tel que, pour $|z| > \alpha$, $\frac{|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}|}{|z^n|} < 1$. On peut donc écrire :

$$(*) \qquad |z| > \alpha \Longrightarrow |a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}| < |z^n|.$$

2.2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On sait qu'un *chemin fermé* ou *lacet* dans U est une application continue $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Mais c'est aussi une application continue du cercle $\mathbb{S}^1$ (considéré comme le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1) dans l'ouvert U ; c'est cette définition qu'on adoptera $z \in \mathbb{S}^1 \stackrel{\gamma}{\longmapsto} \gamma(z) \in U$.

Rappelons que deux lacets (dans U) $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow U$ sont dits *homotopes* s'il existe une application continue $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \longrightarrow U$ (appelée *homotopie* entre γ_0 et γ_1) telle que $H(z, 0) = \gamma_0(z)$ et $H(z, 1) = \gamma_1(z)$.

2.3. On note σ le monôme $\sigma(z) = z^n$. Pour tout réel $R \geq 0$, soient $C_R : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_R : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ les chemins fermés définis par $C_R(z) = \sigma(Rz)$ et $\gamma_R(z) = P(Rz)$. Pour $R = 0$, C_0 et γ_0 sont les chemins constants $C_0(0) = 0$ et $\gamma_0(0) = a_0$.

On fait l'hypothèse :

($\mathcal{H}$) Le polynôme P ne s'annule en aucun point de $\mathbb{C}$.

2.4. On considère l'application $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par :

$$H(z,s) = P(sRz) = \gamma_{sR}(z).$$

Alors H est continue et telle que $H(z,0) = \gamma_0(z) = a_0$ et $H(z,1) = \gamma_R(z)$; donc γ_R est homotope dans $\mathbb{C}^*$ au lacet constant $\gamma_0(z) = a_0$. Par suite les indices $I(\gamma_R, 0)$ et $I(\gamma_0, 0)$ par rapport à 0 respectivement des lacets γ_R et γ_0 sont égaux. On a donc :

(1) $$I(\gamma_R, 0) = I(\gamma_0, 0) = 0.$$

2.5. Comme on a $\left|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}\right| < |z^n|$ pour $|z| > \alpha$ (c'est exactement l'implication $(*)$), on a encore :

$$s\left|a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}\right| < |z^n|$$

pour tout $s \in [0,1]$. Donc le polynôme $P_s(z) = z^n + s\left(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}\right)$ ne s'annule jamais. On suppose désormais $R > \alpha$. L'application $G : \mathbb{C} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $G(z,s) = P_s(z)$ est continue et telle que $G(z,0) = P_0(z) = \sigma(z) = z^n$ et $P_1(z) = P(z)$; par suite l'application $K : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$, définie par l'égalité $K(z,s) = \sigma(Rz) + sQ(Rz)$ où $Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}$, est une homotopie dans $\mathbb{C}^*$ entre le lacet C_R et le lacet γ_R. Ce qui donne :

(2) $$I(\gamma_R, 0) = I(C_R, 0) = n.$$

2.6. Conclusion

D'une part, pour tout $R \geq 0$, l'indice de γ_R par rapport à 0 est nul : c'est l'égalité (1). D'autre part, pour tout $R > \alpha$, l'indice de γ_R par rapport à 0 vaut $n > 0$: c'est l'égalité (2). Il y a contradiction ! L'hypothèse ($\mathcal{H}$) est donc fausse *i.e.* le polynôme P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. □

COMPLÉMENT 2

REGARD SUR QUELQUES OUVERTS DE $\mathbb{C}$

Dans quelles conditions un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ est-il holomorphiquement équivalent à un autre ouvert Ω qu'on pourrait qualifier de plus « simple » ? Quel est le groupe $\mathrm{Aut}(U)$ *des automorphismes de U* ? Il est très difficile, voire même impossible, de donner une réponse à ces deux questions pour la majorité des ouverts de $\mathbb{C}$. Nous nous contentons de cas (topologiquement) particuliers, ceux qu'on rencontre un peu plus souvent. Nous en listons quelques-uns, en précisant leurs revêtements universels et leurs groupes d'automorphismes. Mais nous ne donnons aucune démonstration, nous renvoyons le lecteur désirant en avoir à quelques excellentes références comme par exemple [Ah], [Ca1], [Kr] ou [Vo].

1. Ouverts simplement connexes

La situation n'est pas difficile à décrire. Il y a d'abord deux cas : U est le plan complexe tout entier ou U est strictement contenu dans $\mathbb{C}$.

1.1. Le plan complexe

C'est le plus simple et on peut presque immédiatement tout dire dessus. Son groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ est constitué de toutes les transformations affines complexes :

$$z \longmapsto az+b \qquad \text{avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Sa structure algébrique est celle de produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$ où le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ agit par homothéties sur $\mathbb{C}$. C'est un groupe résoluble non nilpotent comme on peut le voir dans l'exercice 3 du chapitre VI.

1.2. Ouverts strictement contenus dans $\mathbb{C}$

Dans ce cas, il y a deux modèles privilégiés : le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$. Mais ces deux-là sont holomorphiquement équivalents via l'homographie :

$$\Phi : z \in \mathbb{H} \longmapsto \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}.$$

On a aussi vu que le groupe des automorphismes du demi-plan $\mathbb{H}$ consiste en toutes les homographies à coefficients réels (chapitre V corollaire 6.4) :

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{avec } a,b,c,d \in \mathbb{R} : ad-bc = 1$$

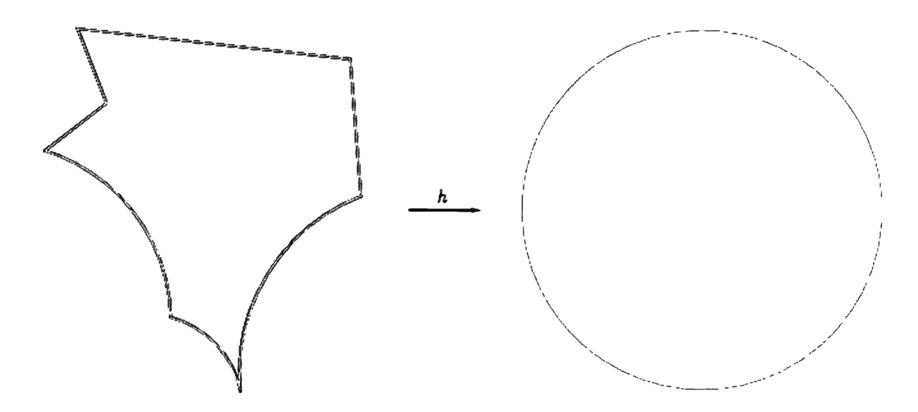
qui est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, quotient de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (groupe des matrices réelles d'ordre 2 de déterminant 1) par le sous-groupe $\{I, -I\}$ (où I est la matrice identité). Quant au disque unité ouvert $\mathbb{D}$, son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ est formé des transformations du type :

$$z \longmapsto e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1} \qquad \text{avec } p \in \mathbb{D} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

C'est aussi le groupe des transformations de la forme $z \longmapsto \frac{\alpha z+\overline{\beta}}{\beta z+\overline{\alpha}}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ (*cf.* théorème 6.3 chapitre V), c'est-à-dire le groupe :

$$\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ tels que } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Un ouvert simplement connexe quelconque U qui n'est pas $\mathbb{C}$ est holomorphiquement équivalent au disque unité $\mathbb{D}$ (et donc aussi au demi-plan $\mathbb{H}$) comme nous l'avons énoncé dans le théorème 6.1. du chapitre V. Pour la démonstration voir par exemple [Ca1], [SG] ou [Vo].



2. Ouverts non simplement connexes

Ils sont abondants et il n'est pas question de parler de leur classification de façon générale. Nous ne verrons que les plus « élémentaires ».

2.1. Les couronnes

Soient r et R deux réels tels que $0 \leq r < R \leq +\infty$. On appelle *couronne* (ouverte) de *centre* z_0 et de rayons r et R l'ensemble $C(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

Par la translation $z \longmapsto (z - z_0)$, on voit que $C(z_0, r, R)$ est holomorphiquement équivalente (et en d'autres sens géométriques d'ailleurs) à la couronne de centre l'origine et de rayons r et R qu'on notera simplement $C(r, R)$. Désormais, toutes nos couronnes seront centrés à l'origine.

Question : *On se donne deux couronnes $C(r, R)$ et $C(r', R')$. Dans quelles conditions sont-elles holomorphiquement équivalentes ?*

La réponse à cette question passe par la description explicite de la couronne $C(r, R)$ en fonction des valeurs des deux rayons r et R.

Type 1 : $r = 0$ **et** $R = +\infty$

On a alors $C(r, R) = \mathbb{C}^*$, ouvert bien connu. Son revêtement universel est le plan complexe tout entier de projection $p : z \in \mathbb{C} \longmapsto p(z) = e^{2i\pi z} \in \mathbb{C}^*$. C'est même un morphisme de groupes qui donne lieu à la suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{C}^* \longrightarrow 1$.

Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$ (qu'on notera G) est engendré par les homothéties complexes $h : z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et l'homographie $\gamma(z) = \frac{1}{z}$. C'est en fait le produit semi-direct

interne du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ (vu comme le groupe des homothéties linéaires) par le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant sur $\mathbb{C}^*$ par conjugaison par l'intermédiaire de son générateur γ :

$$(\gamma \cdot h)(z) = (\gamma^{-1} \circ h \circ \gamma)(z) = \frac{z}{a} = h^{-1}(z)$$

pour $h(z) = az$. Il est résoluble puisque son premier groupe dérivé $G_1 = [G, G] = \mathbb{C}^*$ est commutatif. Mais il n'est pas nilpotent car $G^2 = [G, G^1] = [G, G_1] = G_1$, donc $G^3 = [G, G^2] = G_1$ et, pour tout entier $n \geq 1$, on a $G^{n+1} = [G, G^n] = G_1$.

Type 2 : $r = 0$ **et** $R < +\infty$

C'est alors le disque de rayon $R > 0$ privé de l'origine. Par l'homothétie $z \longmapsto \frac{z}{R}$ il est holomorphiquement équivalent au disque unité épointé $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \backslash \{0\}$. Ce dernier admet le demi-plan $\mathbb{H}$ comme revêtement universel de projection $p : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}^*$ avec $p(z) = e^{2i\pi z}$.

Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^*)$ des auomorphismes de $\mathbb{D}^*$ est réduit au groupe $\mathrm{SO}(2)$ des rotations centrées à l'origine. En effet, un automorphisme φ de $\mathbb{D}^*$ est avant tout une fonction holomorphe $\mathbb{D}^* \longrightarrow \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Comme elle est à valeurs dans $\mathbb{D}$, elle est bornée ; elle se prolonge donc à $\mathbb{D}$ (en vertu du Théorème de Riemann VI.5.5). Par le théorème V.6.3, l'automorphisme φ est alors de la forme $\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{z-p}{\overline{p}z-1}$ où $p \in \mathbb{D}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Mais comme nécessairement $\varphi(0) = 0$, $p = 0$ et par suite φ est une rotation.

Type 3 : $r > 0$ **et** $R = +\infty$

C'est le plan complexe $\mathbb{C}$ duquel on a ôté le disque fermé de centre l'origine et de rayon r. Il se transforme biholomorphiquement en le disque épointé $\mathbb{D}^*$ par l'homographie $\varphi(z) = \frac{r}{z}$. « Nous sommes donc dans la situation qui précède ».

Type 4 : $r > 0$ **et** $R < +\infty$

C'est le cas où $C(r, R)$ est ce qu'on pourrait considérer comme une « vraie couronne » au sens familier. Décrivons son revêtement universel. À cet effet, on considère la bande :

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \Im(z) < \beta\}$$

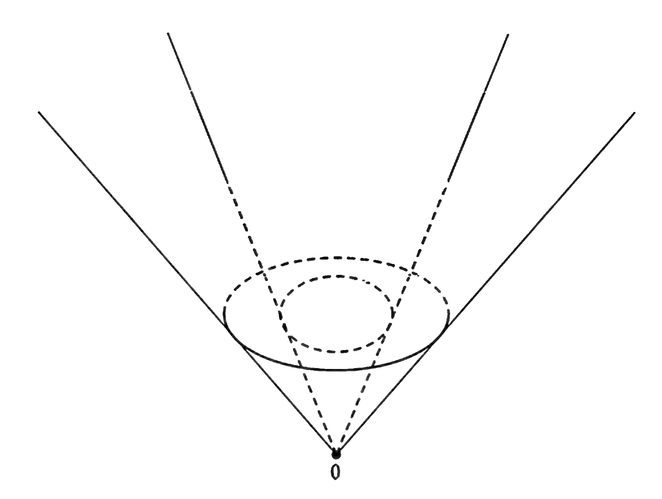
avec $\alpha = -\frac{\ln(R)}{2\pi}$ et $\beta = -\frac{\ln(r)}{2\pi}$. L'application :

$$p_0 : z \in \mathcal{B} \longmapsto e^{2i\pi z} \in C(r, R)$$

est un revêtement de groupe $\mathbb{Z}$. Mais la bande $\mathcal{B}$ est simplement connexe et strictement contenue dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème d'uniformisation (Théorème V.6.1), il existe un isomorphisme φ envoyant $\mathbb{D}$ sur $\mathcal{B}$. L'application composée $p = p_0 \circ \varphi : \mathbb{D} \longrightarrow C(r, R)$ est aussi un revêtement de la couronne $C(r, R)$, et c'est son revêtement universel.

Soient $C(r, R)$ et $C(r', R')$ deux couronnes avec $r, r' > 0$ et $R, R' < +\infty$. Supposons $\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}$, ce qui est équivalent à $\frac{R}{R'} = \frac{r}{r'} = \lambda$. Alors l'homothétie $z \longrightarrow \lambda z$ transforme $C(r', R')$ en $C(r, R)$; les deux couronnes $C(r, R)$ et $C(r', R')$ sont donc équivalentes. En particulier, toute couronne $C(r, R)$ est équivalente à $C(1, \rho)$ avec $\rho = \frac{R}{r}$.

Réciproquement, si les deux couronnes $C(r, R)$ et $C(r', R')$ sont équivalentes, alors on a nécessairement $\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}$ (*cf.* [Vo] page 184 pour la démonstration).

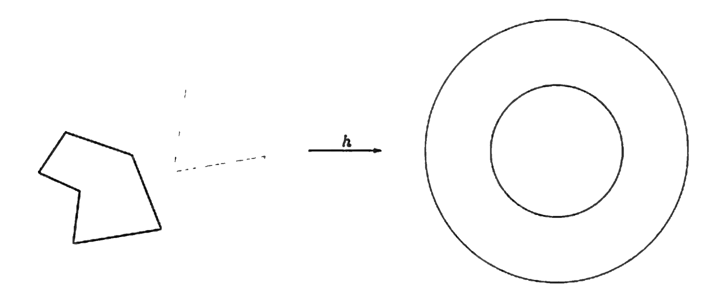


Une famille de couronnes équivalentes indexée par $t \in \mathbb{R}_+^*$

Qu'en est-il du groupe des automorphismes de $C(r, R)$ (avec $0 < r < R < +\infty$) ? Il est engendré par les rotations centrées à l'origine et l'homographie $\gamma : z \longmapsto \frac{rR}{z}$. Il est isomorphe au produit semi-direct $\mathrm{SO}(2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathrm{SO}(2)$ par conjugaison.

Reste le cas plus général où l'ouvert U a un groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}$. Évidemment, une couronne en est l'exemple-type. En plus, elle est à géométrie très simple, et constitue un modèle pour de tels ouverts. Plus précisément, on a le théorème qui suit (voir toujours [Vo] pour la preuve).

2.2. Théorème. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$. Alors U est holomorphiquement équivalent à une couronne $C(r, R)$ où r et R sont tels que $0 \leq r < R \leq +\infty$.*



Le dessin correspond au cas $0 < r < R < +\infty$

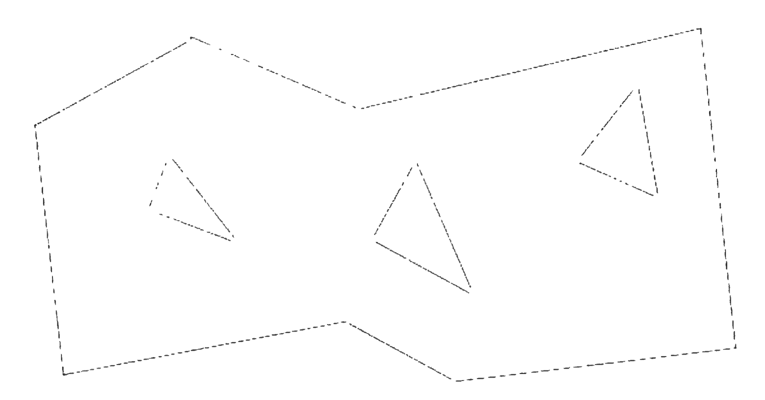
2.3. Conclusion

i) La couronne de type 1 (qui n'est rien d'autre que $\mathbb{C}^*$) n'est équivalente à aucune des couronnes de types 2, 3 et 4 car son groupe d'automorphismes n'est isomorphe à aucun de ceux de ces dernières. On peut aussi voir cela autrement. Supposons qu'il existe un biholomorphisme $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow C$ où C est une couronne de type 2 ou de type 4. Alors comme C est une partie bornée de $\mathbb{C}$, la fonction f est bornée au voisinage de 0 ; elle se prolonge donc en une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier (*cf.* Théorème VI.5.5), par suite elle est constante en vertu du théorème de Liouville. Contradiction !

ii) Une couronne de type 2 et une couronne de type 4 ne sont pas équivalentes car elles ont des groupes d'automorphismes non isomorphes.

2.4. Qu'en est-il pour d'autres ouverts ?

Signalons tout simplement un exemple (*cf.* [Kr] page 267). Un ouvert U obtenu en ôtant du disque unité ouvert $\mathbb{D}$ un nombre fini (au moins deux) de petits disques fermés, a son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(U)$ fini. Et c'est aussi vrai pour tout autre ouvert homéomorphe à U, par exemple celui du dessin ci-dessous.



Pour ceux qui veulent plus de précision sur les groupes d'automorphismes d'ouverts de $\mathbb{C}$ (plus généraux que ceux qu'on a présentés), une discussion se trouve dans ce même livre de S.G. Krantz [Kr].

Terminons par le théorème qui suit, assez important et dont la démonstration découle de la connaissance explicite du revêtement universel de certains ouverts simples de $\mathbb{C}$.

2.5. Petit théorème de Picard. *Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors le complémentaire de l'image de f contient au plus un point.*

Démonstration. Supposons que f n'atteint pas deux valeurs distinctes a et b. Notons U l'ouvert $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ et $\widetilde{U}$ son revêtement universel.

Comme $\widetilde{U}$ est simplement connexe, à biholomorphisme près, il y a trois possibilités : $\widetilde{U}$ est la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, le plan complexe $\mathbb{C}$ ou le disque unité $\mathbb{D}$. Comme U est non compact, $\widetilde{U}$ ne peut pas être $\widehat{\mathbb{C}}$. Et comme $\pi_1(U)$ est le groupe libre à deux générateurs (*cf.* Exemple 2, page 172) et qu'il doit s'injecter dans $\mathrm{Aut}(\widetilde{U})$, $\widetilde{U}$ n'est pas $\mathbb{C}$ non plus. Donc $\widetilde{U}$ est le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Soit $q : \mathbb{D} \longrightarrow U$ la projection de revêtement. Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, il existe une application holomorphe $\widetilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ telle que $q \circ \widetilde{f} = f$ (ce qu'on appelle un *relèvement* de f ; voir par exemple [Fo] page 23). La partie $\mathbb{D}$ étant bornée dans $\mathbb{C}$, la fonction $\widetilde{f}$ est aussi bornée, donc constante par le théorème de Liouville. Par suite f est constante. Mais ceci est une contradiction avec l'hypothèse sur f. □

SURFACES RIEMANNIENNES

CHAPITRE VII

SURFACES DIFFÉRENTIABLES

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ a une particularité parmi les espaces topologiques : il possède des coordonnées globales (x_1, x_2). Celles-ci permettent d'y faire de l'analyse. Mais d'autres n'ayant aucune structure linéaire se comportent toutefois localement comme $\mathbb{R}^2$; on les appelle *surfaces différentiables.* L'objet de ce chapitre est d'en donner la définition, de décrire certaines de leurs propriétés et les divers objets qui leur sont rattachés.

1. Définitions et exemples

Dans ce paragraphe M sera un espace topologique paracompact *i.e.* M est séparé et tel que tout recouvrement ouvert $\{U_i\}$ admet un recouvrement ouvert $\{V_j\}$ plus *fin* (tout V_j est contenu dans un U_i) et *localement fini* (tout compact ne coupe qu'un nombre fini d'ouverts V_j).

1.1. Définition. *On dira que M est une* **surface topologique** *si tout point $x \in M$ possède un voisinage ouvert U homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ i.e. il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U$ telle que φ et son inverse φ^{-1} soient continues.*

Pour connaître un point x de U, il suffit donc de connaître les coordonnées (x_1, x_2) dans $\mathbb{R}^2$ de son image réciproque $\varphi^{-1}(x)$. Pour cette raison, on dira que U est un *ouvert de coordonnées locales* de M au voisinage de x. La paire (U, φ) est appelée *carte locale* et $(x_1, x_2) = \varphi^{-1}(x)$ sont les *coordonnées* de x. Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes locales telles que l'intersection $U \cap V$ soit non vide, alors un point $x \in U \cap V$ est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2) dans U et ses coordonnées (x'_1, x'_2) dans V. Comme le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi} & U \cap V \\ \downarrow & & \| \\ \psi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\psi} & U \cap V \end{array}$$

est commutatif, on doit avoir :

$$(x'_1, x'_2) = \psi^{-1} \circ \varphi(x_1, x_2). \qquad \text{(VII.1)}$$

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est appelée *changement de coordonnées* de la carte (U, φ) à la carte (V, ψ). Souvent, on a besoin d'une certaine régularité de cette application ; ce qui nous amène à définir la notion de *surface différentiable.* Dorénavant M sera une surface topologique.

1.2. Définition. *Deux cartes locales (U, φ) et (V, ψ) sont dites* **compatibles** *si l'une des conditions suivantes est remplie :*

i) $U \cap V = \emptyset$,
ii) $U \cap V \neq \emptyset$ *et $\psi^{-1} \circ \varphi$ est un difféomorphisme de classe C^∞ ; ceci a un sens car cette application est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.*

Un ensemble de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sur M est appelé *atlas* si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de M et si deux cartes quelconques (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont compatibles.

Deux atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ sont dits *équivalents* si leur réunion est un atlas *i.e.* pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$, les cartes (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) sont compatibles.

1.3. Définition. *Une classe d'équivalence d'atlas est appelée* **structure différentiable** *sur M. On dira que M est une* **surface différentiable***.*

(Pour simplifier, dans toute la suite on dira simplement « surface » au lieu de « surface différentiable ».)

Tout ouvert non vide d'une surface est une surface.

Une surface M est dite *orientable* si elle peut être définie à l'aide d'un atlas (U_i, φ_i) pour lequel les difféomorphismes (VII.1) préservent l'orientation de $\mathbb{R}^2$: pour $x \in U_i \cap U_j$, le déterminant de l'application linéaire $d\left(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i\right)(\varphi_i^{-1}(x))$ est strictement positif.

Une surface M est dite *connexe, compacte...* si l'espace topologique sous-jacent M est connexe, compact...

Dans toute la suite de cette section on ne considérera que les surfaces connexes.

1.4. Exemples

Souvent nous ne spécifierons que la manière d'obtenir les cartes. Le lecteur peut vérifier lui-même leur compatibilité. On peut obtenir des exemples de différentes manières. Mais il est clair que le premier est l'espace $\mathbb{R}^2$ lui-même puisqu'il constiue le *modèle local*.

i) Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Une application différentiable $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ (U ouvert de $\mathbb{R}^3$) est dite de *rang constant* si le rang de l'application linéaire $d_x f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ (différentielle de f au point x) ne dépend pas de x, donc égal à 0 ou 1. On dira que f est une *submersion* si pour tout $x \in U$, $d_x f$ est surjective, donc de rang 1. Pour tout $c \in f(U)$, posons :

$$M = \{x \in U : f(x) = c\}.$$

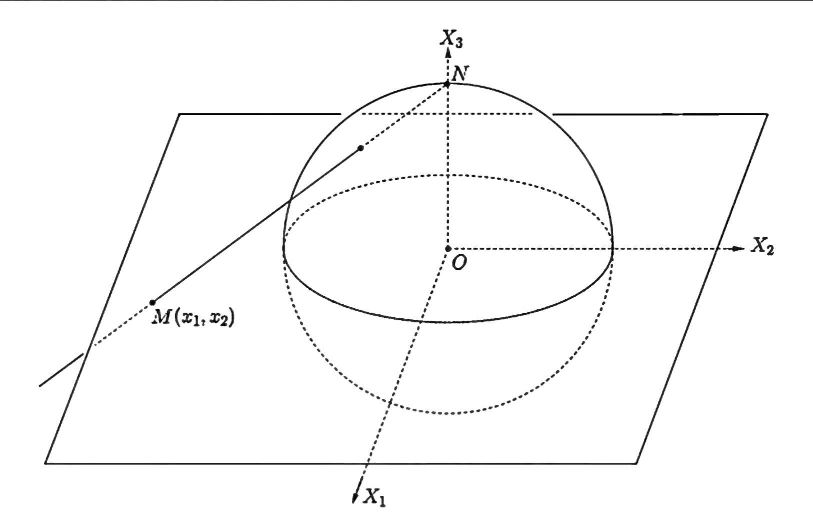
Supposons que f est une submersion. On montre alors, par le *théorème des fonctions implicites* (voir [Ca2]), que M est une surface. On dira que f est une *fonction definissant* la surface M.

On appelle *surface* de $\mathbb{R}^3$ toute partie fermée M telle que, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et une application différentiable $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ définissant $M \cap U$.

ii) La sphère $\mathbb{S}^2$

C'est la partie fermée de $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{S}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$. C'est évidemment une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par une submersion ; mais on peut voir aussi sa structure de surface en exhibant explicitement un atlas. Considérons le recouvrement ouvert suivant $U_1 = \mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 \backslash \{S\}$ où N et S sont respectivement le *pôle nord* et le *pôle sud* de la sphère. Alors l'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{-1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2}\right)$$



est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur U_1. L'application inverse est donnée par :

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 - X_3}, \frac{X_2}{1 - X_3}\right)$$

De même l'application $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2$ donnée par :

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_2^2 + x_2^2}\right)$$

est aussi un homéomorphisme ; l'inverse $\varphi_2^{-1} : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a pour expression :

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{X_1}{1 + X_3}, \frac{X_2}{1 + X_3}\right).$$

L'application de changement de cartes :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

s'écrit :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

qui est clairement différentiable ainsi que son inverse. Nous avons donc exhibé de façon explicite un atlas de la sphère $\mathbb{S}^2$. Les applications φ_1^{-1} et φ_2^{-1} sont appelées *projections steréographiques* de pôles respectifs N et S.

iii) L'ellipsoïde

Un exemple ressemblant de très près à celui de la sphère. Prenons l'ellipsoïde M de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ où a, b et c sont trois nombres réels strictement positifs. Considérons l'application :

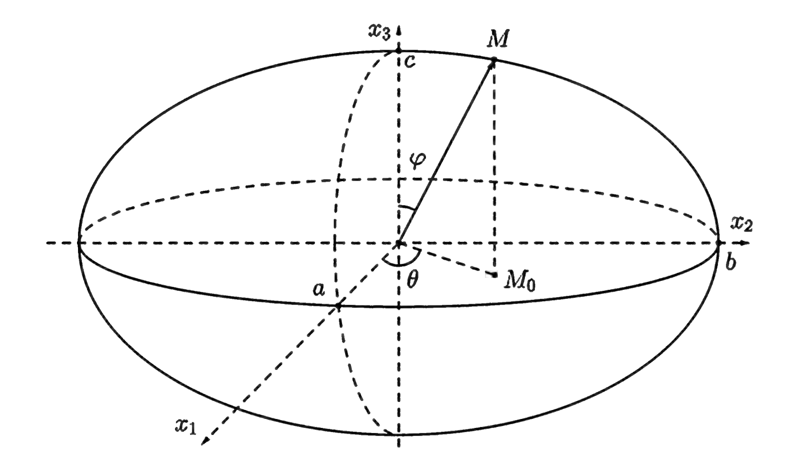
$$f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1\right) \in \mathbb{R}.$$

Elle a pour différentielle au point $x = (x_1, x_2, x_3)$: $d_x f = \left(\frac{2x_1}{a^2}, \frac{2x_2}{b^2}, \frac{2x_3}{c^2}\right)$. Elle est surjective en tout point $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ ($(0,0,0)$ ne fait pas partie de M). En vertu du théorème des fonctions implicites, M est une surface différentiable.

Donnons-en une *paramétrisation régulière*, c'est-à-dire une carte locale (ou système de coordonnées locales). Soient L le demi-plan fermé de $\mathbb{R}^3$ défini par $x_2 = 0$ et $x_1 \geq 0$, V l'ouvert $\mathbb{R}^3 \backslash L$ (*i.e.* $\mathbb{R}^3$ privé de L) et $S = M \cap V$; S est un ouvert de M.

On prend $U =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$. Le paramétrage de l'ouvert S de la surface M peut être donné, comme dans le cas de la sphère de centre l'origine et de rayon R par l'application suivante :

$$\Phi : (\theta, \varphi) \in U \longmapsto (x_1, x_2, x_3) \in S \quad \text{où} \quad \begin{cases} x_1 = a\cos\theta\sin\varphi \\ x_2 = b\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = c\cos\varphi. \end{cases}$$



L'isomorphisme linéaire $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (ax_1, bx_2, cx_3) \in \mathbb{R}^3$ induit de façon évidente un difféomorphisme $h : \mathbb{S}^2 \longrightarrow M$.

iv) Le plan projectif $P^2(\mathbb{R})$

Nous donnerons d'abord la définition en dimension quelconque. Soit $n \geq 0$ un entier. Sur $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ on considère la relation d'équivalence $x \sim y$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = \lambda x$. Le quotient :

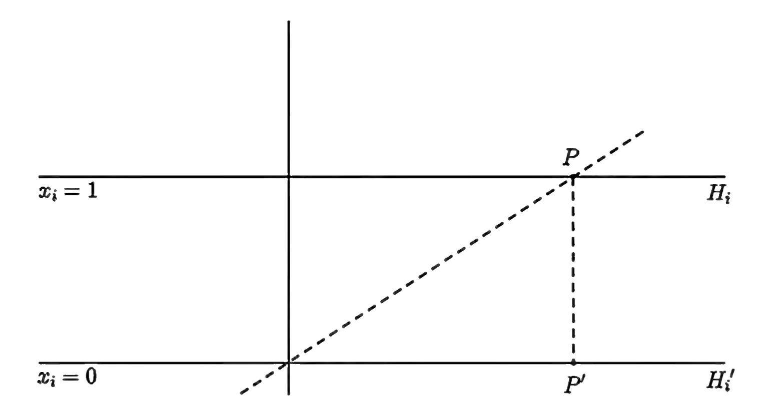
$$P^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim$$

est l'*espace projectif réel* de dimension n. C'est l'ensemble des droites vectorielles (privées de l'origine) de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$. Un point x de $P^n(\mathbb{R})$ est représenté par un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$; les coordonnées $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ de ce vecteur donnent donc x ; mais, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{n+1})$ donnent aussi le même point x. Ces coordonnées ne sont donc définies qu'à un facteur multiplicatif près ; on les note $[x_1, \cdots, x_{n+1}]$ et on les appelle *coordonnées homogènes* de x. On note π la projection canonique $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$. On munit $P^n(\mathbb{R})$ de la *topologie quotient*, c'est-à-dire la topologie $\mathcal{T}$ la plus fine parmi toutes celles qui rendent continue la projection π.

On prend $n = 3$. Pour $i = 1, 2, 3$, on pose $\widetilde{U}_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i \neq 0\}$ et $U_i = \pi(\widetilde{U}_i)$. Les U_i forment un recouvrement ouvert de $P^2(\mathbb{R})$ pour $\mathcal{T}$.

On considère les applications $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_i$ définies par :

$$\begin{cases} \varphi_1(u,v) = [1,u,v] \\ \varphi_2(u,v) = [u,1,v] \\ \varphi_3(u,v) = [u,v,1]. \end{cases}$$



H_i et H_i' sont les plans d'équations
respectives $x_i = 1$ et $x_i = 0$

Vérifinons la compatibilité entre les cartes. Faisons-le par exemple pour (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) en explicitant $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ qui est une application de $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ dans $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$. L'élément (u,v) qu'on va prendre dans $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^2$ est tel que $u \neq 0$. On a :

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(u,v) = \varphi_2^{-1}([1,u,v]) = \varphi_2^{-1}\left(\left[\frac{1}{u}, \frac{u}{u}, \frac{v}{u}\right]\right) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right) = (u', v').$$

Ceci montre que le changement de coordonnées $(u',v') = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(u,v)$ est C^∞ (et même analytique réel). Le recouvrement ouvert $\{U_i\}$ et les applications φ_i forment donc un atlas définissant une structure de surface différentiable sur $P^2(\mathbb{R})$.

Cette surface n'est pas orientable. En effet, la matrice jacobienne de la transformation $(u,v) \longmapsto (u',v')$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & 0 \\ \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}$$

et a pour déterminant jacobien $-\frac{1}{u^3}$ qui est strictement négatif pour $u > 0$ et strictement positif pour $u < 0$.

2. Applications différentiables

2.1. Définition. *On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ entre deux surfaces est* ***différentiable*** *au point $x \in M$ si, pour toute carte locale (U, φ) de M contenant x, toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(x)$ et tout voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application :*

(VII.2) $$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2$$

est différentiable au point $\varphi^{-1}(x)$. On dit que f est **différentiable**, *si elle est différentiable en tout point de M.*

En particulier, on dira qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est *différentiable* si, pour toute carte locale (U, φ), la fonction :

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable. La dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ sera donc par définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(x)). \tag{VII.3}$$

Si l'application f est différentiable, bijective et f^{-1} différentiable, on dira que f est un *difféomorphisme* de M sur N.

On notera $C^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N et simplement $C^\infty(M)$ lorsque $N = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des difféomorphismes d'une surface est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Diff}(M)$.

2.2. Partition de l'unité.

C'est l'un des instruments les plus puissants en Analyse ; il permet de recoller des objets définis localement en objets globaux.

Soient M une surface et $\rho : M \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On appelle *support* de ρ et on note $\mathrm{supp}(\rho)$ l'adhérence de l'ensemble $\{x \in M : \rho(x) \neq 0\}$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement ouvert de M. On dira que $\mathcal{U}$ est *localement fini* si tout point $x \in M$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts de la famille $\mathcal{U}$. Sur une surface (paracompacte comme cela a été supposé avant) un tel recouvrement existe toujours ; on peut même le choisir dénombrable.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_i$ un recouvrement localement fini sur M. On appelle *partition de l'unité subordonnée* à $\mathcal{U}$ une famille de fonctions réelles différentiables positives $(\rho_i)_i$ telles que :

- pour tout $i \in I$, $\mathrm{supp}(\rho_i)$ est contenu dans U_i,
- $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$.

Proposition. *Tout recouvrement localement fini $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ admet une partion de l'unité différentiable $(\rho_i)_{i \in I}$.*

3. Espace tangent

Soient M une surface et $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas définissant M. On a vu qu'une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable si, pour tout $i \in I$, la fonction :

$$f \circ \varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable et que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi_i)}{\partial x_k}(\varphi_i^{-1}(x)).$$

Pour tout $k = 1, 2$, on obtient donc un opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ qui à toute fonction différentiable f sur U_i associe la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. En chaque point $x \in U_i$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ sont linéairement indépendants. Si (U_j, φ_j) est une autre carte locale de système de coordonnées (x'_1, x'_2), un point $x \in U_i \cap U_j$ est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2) dans U_i et ses coordonnées (x'_1, x'_2) dans U_j et on a :

$$(x'_1, x'_2) = \varphi_{ij}(x_1, x_2)$$

avec $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$. Il est alors facile de montrer que, pour tout $k = 1, 2$, on a :

(VII.4)
$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial x'_1}{\partial x_k}(x)\frac{\partial}{\partial x'_1}(x) + \frac{\partial x'_2}{\partial x_k}(x)\frac{\partial}{\partial x'_2}(x).$$

En tout point $x \in M$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ engendrent donc sur $\mathbb{R}$ un espace vectoriel de dimension 2 indépendant de la carte choisie (U_i, φ_i) pour le définir.

3.1. Définition. *On appelle* **espace tangent** *à M en x, l'espace vectoriel T_xM engendré par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ à l'aide d'une carte quelconque (U_i, φ_i).*

Pour les surfaces M de $\mathbb{R}^3$, on peut percevoir de manière très concrète la notion d'espace tangent. Si M est une surface de $\mathbb{R}^3$ définie localement sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ par une équation du type $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ où $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞, alors l'espace tangent à M au point $a = (a_1, a_2, a_3)$ est le noyau de la forme affine sur $\mathbb{R}^3$:

(VII.5)
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(a)(x_3 - a_3).$$

Par exemple la sphère $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ est définie par l'équation $F(x_1, x_2, x_3) = 1 - \sum_{k=1}^3 x_k^2 = 0$ et a pour espace tangent au point $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ le plan affine de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = \sqrt{3}$.

Pour tout $x \in M$, T_xM est un espace vectoriel réel mais il dépend du point par lequel il « passe ». On définit l'ensemble TM comme suit :

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

Un élément de TM est la donnée d'un couple (x, u_x) où x est un point de M et u_x un vecteur de T_xM. On a une projection canonique $\pi : TM \longrightarrow M$ définie par $\pi(x, u_x) = x$.

3.2. Définition. *On appelle* **champ de vecteurs** *sur M toute application $X : M \longrightarrow TM$ telle que, sur toute carte locale (U, φ), X s'écrit $X(x) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ où $f_1, f_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^∞.*

L'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M est un module sur l'anneau $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞. On peut y définir une structure multiplicative de la façon suivante : soient X et Y deux champs de vecteurs sur M qu'on peut écrire sur la carte locale (U, φ) :

$$X(x) = f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}(x) \quad \text{et} \quad Y(x) = g_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}(x) + g_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}(x).$$

Un calcul facile montre que pour toute fonction $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, on a :

$$X(Y(h)) - Y(X(h)) = \sum_{k,\ell} \left(f_k \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k} \frac{\partial h}{\partial x_\ell} - g_\ell \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right).$$

On définit ainsi un nouveau champ (local) de vecteurs $XY - YX$; on montre que ceci ne dépend pas de la carte choisie ; on obtient alors un champ de vecteurs global $XY - YX$ qu'on note $[X,Y]$ et qu'on appelle *crochet* de X et Y ; $[X,Y]$ est le commutateur de X et Y vus comme opérateurs (*différentiels d'ordre* 1) sur $C^\infty(M)$. On vérifie facilement l'identité suivante dite *identité de Jacobi* :

(VII.6) $$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[Y,X]] = 0.$$

On dira que $(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$ est l'*algèbre de Lie* des champs de vecteurs sur M.

3.3. Application tangente

Soit h une application différentiable d'une surface M dans une autre surface N. On supposera que M et N sont définies par les atlas respectifs $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ et, pour ne pas alourdir les notations, on fera comme si les ouverts de coordonnées U_i et V_j étaient en fait l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in M$ de coordonnées (x_1, x_2), l'application h définit une application linéaire :

(VII.7) $$d_x h : T_x M \longrightarrow T_{h(x)} N$$

qui à tout opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}(x)$, $k = 1,2$, associe l'opérateur $d_x h \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x) \right)$ donné sur une fonction $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

(VII.8) $$d_x h \left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x) \right)(f) = \frac{\partial y_1}{\partial x_k}(x) \frac{\partial f}{\partial y_1}(h(x)) + \frac{\partial y_2}{\partial x_k}(x) \frac{\partial f}{\partial y_2}(h(x))$$

où (y_1, y_2) sont les coordonnées du point $h(x)$ pour tout $x \in M$. On peut vérifier que la définition de l'application $d_x h$ ne dépend pas du système de coordonnées locales. On l'appelle *application tangente* à h au point $x \in M$.

4. Formes différentielles

Nous les introduisons d'abord sur un ouvert M de $\mathbb{R}^2$ ensuite nous transposerons la définition au cas général par le biais des cartes locales (U_i, φ_i). Nous verrons aussi comment se transportent les formes différentielles par une application différentiable et comment, en degré maximum, elles définissent des mesures sur une surface.

4.1. Généralités

Soient M un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et r un entier naturel. On note $\Lambda^r \mathbb{R}^2$ l'espace des r-formes extérieures sur $\mathbb{R}^2$ (dont on sait qu'il est réduit à $\{0\}$ pour $r < 0$ et $r > 2$).

Une *forme différentielle de degré* r (ou simplemen *r-forme*) sur M est une application $\alpha : M \longrightarrow \Lambda^r \mathbb{R}^2$ de classe C^∞. Pour chaque $x \in M$, $\alpha(x)$ est une r-forme linéaire alternée sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des r-formes différentielles sur M est un espace vectoriel réel qu'on notera $\Omega^r(M)$; décrivons-le explicitement pour $r = 0, 1, 2$.

i) Pour $r = 0$, $\Lambda^0\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}$. Les 0-forme sont donc les fonctions C^∞, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

ii) Prenons $r = 1$. Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On sait qu'en tout point $x = (x_1, x_2) \in M$ la différentielle $d_x f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ *i.e.* $d_x f$ est un élément de $\Lambda^1\mathbb{R}^2$; elle a pour expression :

(VII.9) $$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)dx_2.$$

Les 1-formes dx_1, dx_2 sont les différentielles des fonctions coordonnées $x \in M \longmapsto x_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 1, 2$. Prises en un point, elles constituent une base de l'espace vectoriel $\Lambda^1\mathbb{R}^2$. Comme une 1-forme α sur M est une application $M \longrightarrow \Lambda^1\mathbb{R}^2$, elle s'écrit sous la forme $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ où α_1 et α_2 sont des fonction C^∞ sur M.

iii) Prenons $r = 2$. La 2-forme $dx_1 \wedge dx_2$ définit une base de $\Lambda^2\mathbb{R}^2$. Ainsi toute 2-forme différentielle α sur M est du type $\beta = \beta_0 dx_1 \wedge dx_2$ où β_0 est une fonction C^∞ sur M.

On pose $\Omega^*(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \Omega^2(M)$. C'est un espace vectoriel réel qui possède en plus une structure de module sur l'algèbre $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞. Le produit $f\omega$ d'une r-forme ω par une fonction f s'étend aux formes de degré supérieur ou égal à 1. On le définit comme suit :

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2) \wedge (\beta_1 dx_1 + \beta_2 dx_2) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)dx_1 \wedge dx_2.$$

Bien sûr, on a $\alpha \wedge \beta = 0$ lorsque $\text{degré}(\alpha) + \text{degré}(\beta) \geq 3$. On peut vérifier facilement que

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs}\beta \wedge \alpha \quad \text{et} \quad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$$

L'espace $\Omega^*(M)$ est ainsi muni d'une structure d'*algèbre graduée anticommutative*.

4.2. Effet d'une application différentiable

Soient M et N deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application C^∞. Alors pour tout point $x \in M$, la différentielle $d_x\varphi$ est une application linéaire de l'espace $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, elle induit une application linéaire :

$$\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$$

définie pour toute r-forme β sur N de la façon suivante (l'expression sera donnée suivant les valeurs de r) en $x \in M$:

$$\varphi^*(\beta)(x) = \beta(\varphi(x)), \qquad \varphi^*(\beta)(x)(u) = \beta(\varphi(x))(d_x\varphi(u))$$

si β est une fonction ou une 1-forme. Si c'est une 2-forme, ce sera :

$$\varphi^*(\beta)(x)(u_1, u_2) = \beta(\varphi(x))(d_x\varphi(u_1), d_x\varphi(u_2)).$$

Ici, u, u_1 et u_2 sont des vecteurs tangents à M au point x. On dira que $\varphi^*(\beta)$ est l'*image réciproque* de β par φ.

On peut préciser l'écriture à l'aide des composantes φ_1, φ_2 de φ qui sont des fonctions réelles C^∞ sur M. Notons (x_1, x_2) et (y_1, y_2) les coordonnées respectivement sur M et N.

Pour les fonctions, la situation est claire : $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Voyons comment ça se passe pour les 1-formes et les 2-formes.

Pour tout $k = 1, 2$ la composante φ_k n'est rien d'autre que la composée $y_k \circ \varphi$, y_k étant considérée comme la restriction à M de la projection $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y_k \in \mathbb{R}$. Alors si β a pour écriture :

$$\beta = \beta_1(y_1, y_2)dy_1 + \beta_2(y_1, y_2)dy_2 \quad \text{ou} \quad \beta = h(y_1, y_2)dy_1 \wedge dy_2$$

$\varphi^*(\beta)$ s'écrira sur M : $\varphi^*(\beta) = (\beta_1 \circ \varphi)d\varphi_1 + (\beta_2 \circ \varphi)d\varphi_2$ ou $\varphi^*(\beta) = (h \circ \varphi)d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$, c'est-à-dire, en termes de coordonnées (x_1, x_2) :

$$\varphi^*(\beta) = \left(\beta_1 \circ \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \beta_2 \circ \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\beta_1 \circ \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \beta_2 \circ \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right) dx_2$$

ou :

$$\varphi^*(\beta) = h \circ \varphi \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

Les propriétés essentielles de l'application $\varphi^* : \Omega^r(N) \longrightarrow \Omega^r(M)$ sont les suivantes :

(1) Si φ est l'identité de $M \subset \mathbb{R}^2$, φ^* est l'identité de l'espace $\Omega^r(M)$ pour tout r ; si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} L$ sont deux applications C^∞ alors $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

(2) Si φ est un difféomorphisme alors φ^* est un isomorphisme entre $\Omega^*(N)$ et $\Omega^*(M)$ tel que $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$ et vérifiant en plus $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)$.

Mettons-nous maintenant dans le cas général *i.e.* M n'est plus forcément un ouvert de $\mathbb{R}^2$ mais une surface quelconque définie comme toujours par un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. On posera $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$.

Une *r-forme différentielle* sur M est une collection $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ où α_i est une r-forme sur l'ouvert $\varphi_i^{-1}(U_i)$ telle que sur toute intersection non vide $U_i \cap U_j$ on ait la condition de recollement :

(VII.10) $$\alpha_i = \varphi_{ij}^*(\alpha_j).$$

L'espace des r-formes différentielles sur M sera toujours noté $\Omega^r(M)$. Toutes les propriétés qu'on vient de donner de l'espace $\Omega^r(M)$ dans le cas M difféomorphe à $\mathbb{R}^2$ se transportent systématiquement au cas où M est une surface.

On conviendra que dorénavant l'écriture dans une carte locale (U, x_1, x_2) d'une r-forme α sur M sera comme celles qu'on a données dans 4.1 :

Une fonction f, une 1-forme $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ ou une 2-forme $\beta = h dx_1 \wedge dx_2$.

4.3. Intégration d'une forme volume

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$; la restriction de la mesure de Lebesgue $\lambda = dx_1 \otimes dx_2$ induit une mesure λ sur $\mathcal{O}$. Soient $\mathcal{O}'$ un autre ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ un difféomorphisme de classe C^1. Rappelons d'abord la formule de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue :

Une fonction mesurable $f : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathbb{R}$ est λ-intégrable si, et seulement si, la fonction $f \circ \varphi$ est μ-intégrable (μ étant la mesure $|J(\varphi)|\lambda$ et $J(\varphi)$ le déterminant jacobien de φ) et on a en plus $\int_{\mathcal{O}'} f d\lambda = \int_{\mathcal{O}} f \circ \varphi |J(\varphi)| d\lambda$.

Soit maintenant ω une 2-forme différentielle à support compact sur $\mathbb{R}^2$; alors ω s'écrit $\omega = f dx_1 \wedge dx_2$ où f est une fonction à support compact. On définit l'intégrale de ω sur $\mathbb{R}^2$ comme étant le nombre :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \otimes dx_2.$$

On vérifie facilement que, si $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^* \omega = (\text{signe de } J(\varphi)) \int_{\mathbb{R}^2} \omega.$$

Ceci étant, nous allons préciser quand et comment on peut *intégrer sur une surface* M définie par un atlas $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ où U_i est un recouvrement (localement fini de M). *Alors M est orientable si elle vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes* :

i) *Les déterminants jacobiens de tous les difféomorphismes de changement de cartes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ sont positifs* ;

ii) *Il existe sur M une forme différentielle ω de degré 2 partout non nulle ; ω est appelée* **forme volume** *sur M.*

Supposons M connexe orientée par la donnée d'une 2-forme volume ω. Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité différentiable subordonnée au recouvrement $\mathcal{U}$. Alors la 2-forme $\rho_i \omega$ est à support dans U_i et on a $\omega = \sum_{i \in I} \rho_i \omega$. Le nombre :

$$\sum_{i \in I} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_i^*(\rho_i \omega)$$

(s'il existe) *ne dépend ni du choix de l'atlas (U_i, φ_i) ni de la partition de l'unité (ρ_i)*. On l'appelle *intégrale de ω sur M* et on note $\int_M \omega$. L'intégrale vérifie les propriétés de linéarité évidentes :

$$\int_M \omega + \tau = \int_M \omega + \int_M \tau \qquad \text{et} \qquad \int_M \lambda\omega = \lambda \int_M \omega \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

sous réserve, bien sûr, de l'existence de ces différentes quantités.

Ainsi, toute forme volume ω sur M induit une mesure μ sur la surface, définie pour toute fonction f continue à support compact par :

$$\int_M f(x) d\mu(x) = \int_M f\omega.$$

5. Actions de groupes

Nous présentons de manière brève la notion d'action d'un groupe. Elle sert, entre autres, à construire des exemples divers de surfaces.

Soit M une surface munie d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Pour tout $x \in M$, on notera $\mathcal{O}_x$ sa classe d'équivalence. Si U est une partie de M, $\mathrm{Sat}(U)$ sera son *saturé i.e.*

$\mathrm{Sat}(A) = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_x$. On dira que $\mathcal{R}$ est *ouverte* si, pour tout ouvert U de M, $\mathrm{Sat}(U)$ est un ouvert de M. Soient $\mathcal{R}$ une telle relation d'équivalence, $B = M/\mathcal{R}$ le quotient et notons $\pi : M \longrightarrow B$ la projection canonique. On munit B de la *topologie quotient* : V est un ouvert de B si, et seulement si, $\pi^{-1}(V)$ est un ouvert de M. Cette topologie sur B rend la projection π continue.

Soient Γ un groupe dénombrable discret (cela signifie qu'il est muni de la topologie discrète *i.e.* tout singleton $\{\gamma\}$ est un ouvert) et M une surface. On notera $\mathrm{Diff}(M)$ le groupe des difféomorphismes de M.

5.1. Définition. *Une* **action** *de* Γ *sur* M *est une application continue* $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ *telle que* :

i) $\Phi(e, x) = x$ *pour tout* $x \in M$, *e étant l'élément neutre de* Γ ;

ii) $\Phi(\gamma\gamma', x) = \Phi(\gamma, \Phi(\gamma', x))$ *pour tous* $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ *et tout point* $x \in M$;

iii) *pour tout* $\gamma \in \Gamma$, *l'application partielle* $\Phi(\gamma, \cdot) : x \in M \longrightarrow \Phi(\gamma, x) \in M$ *est un élément de* $\mathrm{Diff}(M)$.

La donnée d'une action Φ de Γ sur M permet de définir une *représentation* de Γ dans le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ *i.e.* un morphisme de groupes $\rho : \gamma \in \Gamma \longmapsto \Phi(\gamma, \cdot) \in \mathrm{Diff}(M)$. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ sera confondu avec $\rho(\gamma)$ et pour tout point $x \in M$, $\rho(\gamma)(x) = \Phi(\gamma, x)$ sera noté simplement γx. L'ensemble $\mathcal{O}_x = \{\gamma x \ : \ \gamma \in \Gamma\}$ est appelé *orbite* de x.

i) On dira que $x \in M$ est un *point fixe* de Φ si $\gamma x = x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'ensemble $\mathrm{Fix}(\Phi)$ des points fixes de Φ est un fermé de M.

ii) Pour tout $x \in M$, posons $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \ : \ \gamma x = x\}$; alors Γ_x est un sous-groupe de Γ appelé *groupe d'isotropie* de x.

iii) On dira que l'action Φ est *libre* si, pour tout $x \in M$, $\Gamma_x = \{e\}$.

iv) Une partie M_0 de M est dite *invariante* par Φ si, pour tout $x \in M_0$, l'orbite $\mathcal{O}_x$ est entièrement contenue dans M_0.

Toute action Φ de Γ sur M définit une *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$:

(VII.11) $$x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma x.$$

Cette relation d'équivalence est ouverte ; en effet, pour tout ouvert U de M, son saturé :

$$\mathrm{Sat}(U) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma U$$

est un ouvert car, pour tout γ, γU est ouvert puisque γ est un difféomorphisme. On munit $X_\Phi = M/\Phi = M/\mathcal{R}$ de la topologie quotient. On dira que l'action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ est :

v) *totalement discontinue* si tout point $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ distincts, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 U = \emptyset$;

vi) *séparante* si tous points $x, y \in M$ non équivalents admettent des voisinages ouverts respectifs U et V tels que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, on ait $\gamma_1 U \cap \gamma_2 V = \emptyset$;

vii) *propre* si, pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Si Γ est fini et agit librement, alors il agit de façon séparante et totalement discontinue (démonstration laissée au lecteur).

On dira que deux actions Φ_1 et Φ_2 définies respectivement sur les surfaces M_1 et M_2 sont *conjuguées*, s'il existe un difféomorphisme $h : M_1 \longrightarrow M_2$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \stackrel{\Phi_1(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_1 \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ M_2 & \stackrel{\Phi_2(\gamma,\cdot)}{\longrightarrow} & M_2. \end{array} \tag{VII.12}$$

Dans toute la suite de cette section, Γ sera un groupe topologique, dénombrable et discret. Dans ce cas, si Γ agit librement et proprement, il agit de façon séparante et totalement discontinue.

5.2. Proposition. *Soient M une surface et Φ une action libre et propre de Γ sur M. Alors le quotient $X_\Phi = M/\Phi$ est une surface et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow X_\Phi$ est un difféomorphisme local i.e. tout point $x \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un difféomorphisme. Si Ψ est une action conjuguée à Φ, les surfaces X_Φ et X_Ψ sont difféomorphes.*

Il est souvent utile de savoir s'il existe une partie d'une surface M (géométriquement intérssante) qui contient le moins possible d'éléments dans chaque orbite. Ceci nous amène à la définition qui suit.

5.3. Définition. *Soit Φ une action libre et propre de Γ sur une surface M. On appelle* **domaine fondamental** *de cette action toute partie fermée Δ de M telle que :*

i) L'intérieur $\text{int}(\Delta)$ de Δ est non vide.

ii) La réunion de tous les $\gamma(\Delta)$ (pour γ parcourant Γ) est égale à M.

iii) $\gamma(\text{int}(\Delta)) \cap \text{int}(\Delta) = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma \backslash \{\text{identité}\}$.

iv) La famille $\{\gamma(\text{int}(\Delta)) : \gamma \in \Gamma\}$ est localement finie : un compact ne rencontre qu'un nombre fini de cette famille.

L'ensemble $\partial\Delta = \Delta \backslash \text{int}(\Delta)$ est le *bord* du domaine fondamental ; il est de mesure nulle (pour la mesure canonique de M : celle donnée par la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ à l'aide des cartes locales). La surface quotient $X = M/\Gamma$ est obtenue à partir de Δ en identifiant les points de $\partial\Delta$ qui sont Γ-équivalents. On admet la :

Proposition. *Toute action libre propre de Γ sur une surface M admet un domaine fondamental. Ce domaine est compact si, et seulement si, $X = M/\Gamma$ l'est.*

5.4. Quelques exemples

i) Soient $M = \mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par $\Phi(q, x) = x + \tau q$ où :

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{et} \quad q\tau = (q_1\tau_1, q_2\tau_2).$$

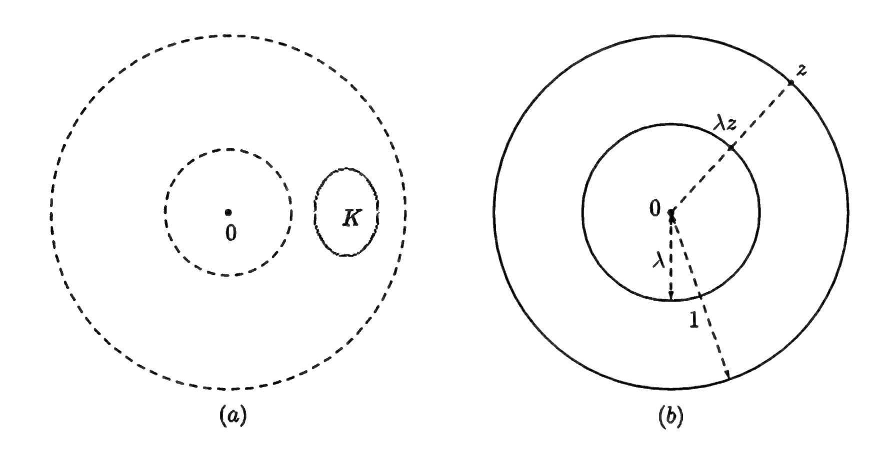
Alors Φ est une action libre et propre ; le quotient M/Γ est une surface. La structure différentiable sur M/Γ ne dépend pas du τ choisi. Cette variété est le tore $\mathbb{T}^2$; elle est obtenue en identifiant deux à deux les côtés opposés d'un parallélogramme (voir sa construction géométrique précise dans Complément 5).

ii) Voici une autre manière de définir le tore $\mathbb{T}^2$. Soient λ tel que $0 < \lambda < 1$ et γ de difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par $\gamma(z) = \lambda z$. L'action de $\Gamma = \langle\gamma\rangle \simeq \mathbb{Z}$ engendrée par γ n'est pas libre puisque γ fixe l'origine 0 mais elle l'est, de façon évidente, sur $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Elle est aussi propre sur $\widetilde{M}$. En effet, soit K un compact de $\widetilde{M}$; alors il existe un entier $n > 0$ tel que K soit contenu dans la couronne ouverte :

$$C = \{z : \lambda^n < |z| < \lambda^{-n}\}$$

(voir (a) dans le dessin ci-dessous). Il est alors évident que $\lambda^r(K) \cap K = \emptyset$ et $\lambda^{-r}(K) \cap K = \emptyset$ pour tout entier $r > 2n$.

Il n'est pas difficile de voir que la couronne fermée $\Delta = \{z : \lambda \leq |z| \leq 1\}$ est un domaine fondamental de l'action en question. Le quotient $M = \widetilde{M}/\Gamma$ s'obtient en identifiant le point z sur le cercle de rayon 1 au point λz sur le cercle de rayon λ (*cf.* (b)). Naturellement, ce quotient est un tore $\mathbb{T}^2$.



(a) (b)

iii) Soient M la sphère $\mathbb{S}^2$, ensemble des vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et Γ le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ (qu'on peut aussi identifier au groupe additif $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ; Γ agit sur $\mathbb{S}^2$ de la façon suivante :

$$\Phi : (\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{S}^2 \longmapsto \gamma x \in \mathbb{S}^2.$$

L'action Φ est libre et le quotient $\mathbb{S}^2/\Gamma$ est une surface non orientable ; c'est le plan projectif $P^2(\mathbb{R})$ que nous avons défini dans la sous-section 1.4.

6. Courbes complexes

Elles se définissent de la même manière que les surfaces différentiables : la notion de difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^2$ est remplacée par celle d'application biholomorphe entre ouverts de $\mathbb{C}$. Soit M une surface topologique de dimension 2.

6.1. Définition. *On dira que M est une* **courbe complexe** *si elle admet un atlas $(U_k, \varphi_k)_{k\in I}$ où, pour tout $k \in I$, φ_k est un homéomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{C}$ sur U_k tel que si $U_k \cap U_j \neq \emptyset$ l'homéomorphisme qui suit soit biholomorphe :*

$$\varphi_j \circ \varphi_k : \varphi_k^{-1}(U_k \cap U_j) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_k \cap U_j) \subset \mathbb{C}.$$

Par définition même, toute courbe complexe est munie naturellement d'une structure de surface analytique réelle ; c'est donc a fortiori une surface différentiable.

Toute partie ouverte d'une courbe complexe (en particulier tout ouvert de $\mathbb{C}$) est une courbe complexe.

Si on regarde une courbe complexe M comme surface différentiable, son espace tangent réel au point $z = (x, y)$ est engendré par les deux opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}(z)$ et $\frac{\partial}{\partial y}(z)$. On appelle *espace tangent complexe* à M au point z l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par l'opérateur $\frac{\partial}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(z) - i\frac{\partial}{\partial y}(z)\right)$; on le note $T_z^{10}M$. Un *champ holomorphe* sur M est un champ de vecteurs Z qui, dans toute locale, s'écrit sous la forme $Z = f(z)\frac{\partial}{\partial z}(z)$ avec f holomorphe.

6.2. Exemples

Ils seront définis de manière presque similaire que pour le cas réel. Evidemment, le premier exemple de courbe complexe est l'espace $\mathbb{C}$.

i) Courbes complexes de $\mathbb{C}^2$

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe (*i.e.* f est holomorphe par rapport à chacune des variables z_1 et z_2 séparément). Pour $c \in f(U)$, on note M l'ensemble $\{z \in U : f(z) = c\}$. Supposons qu'en tout point $z = (z_1, z_2)$ de M, la différentielle $d_z f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ (qui est une application $\mathbb{C}$-linéaire) est surjective. *Alors la version complexe du théorème des fonctions implicites montre que M possède une structure de courbe complexe.* On dira que f est une *fonction définissant M*.

Contrairement au cas réel, il existe beaucoup de courbes complexes qui ne peuvent pas être obtenues de cette manière : il n'existe pas de version holomorphe du *théorème de plongement de Whitney.* Par exemple, une courbe complexe compacte M ne peut jamais être plongée (de manière holomorphe bien sûr) dans un $\mathbb{C}^2$ (ni même dans aucun $\mathbb{C}^n$) : en effet, un plongement serait obtenu à l'aide de deux fonctions holomorphes $f_1, f_2 : M \longmapsto \mathbb{C}$ qui seraient donc bornées puisque M est compacte, et par suite constantes d'après le principe du maximum.

ii) La sphère $\mathbb{S}^2$

Reprenons les notations de 1.4. ii). On a deux ouverts $U_1 = \mathbb{S}^2 - \{N\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 - \{S\}$ et deux applications $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^3$ qui, en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et en posant $z = x_1 + ix_2$, peuvent sécrire sous la forme :

$$\varphi_1(z) = \left(\frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}}, \frac{i(\overline{z}-z)}{1+z\overline{z}}, \frac{-1+z\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)$$

et :

$$\varphi_2(z) = \left(\frac{z+\overline{z}}{1+z\overline{z}}, \frac{i(\overline{z}-z)}{1+z\overline{z}}, \frac{1-z\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right).$$

Leurs inverses s'écrivent respectivement

$$\varphi_1^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1}{1-X_3} + i\frac{X_2}{1-X_3}$$

et :

$$\varphi_2^{-1}(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1}{1+X_3} + i\frac{X_2}{1+X_3}.$$

On pose $\psi_1 = \varphi_1 \circ *$ où $* : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est la conjugaison complexe et $\psi_2 = \varphi_2$. Il est alors facile de vérifier que l'application :

$$\psi_1^{-1} \circ \psi_2 : \psi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* \longrightarrow \psi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$$

s'écrit $\psi_1^{-1} \circ \psi_2(z) = \frac{1}{z}$. C'est une transformation biholomorphe de $\mathbb{C}^*$. L'atlas $(U_k, \psi_k)_{k=1,2}$ munit donc la sphère $\mathbb{S}^2$ d'une structure de courbe complexe.

iii) La droite projective complexe

De manière analogue au cas réel, sur $\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ on considère la relation d'équivalence :

$$z \sim w \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } w = \lambda z.$$

Le quotient $P^1(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ par cette relation d'équivalence est appelé *droite projective complexe*. On peut montrer, en suivant exactement la démarche entreprise pour le cas réel, que $P^1(\mathbb{C})$ possède une structure de courbe complexe : il suffit de remplacer tout objet réel par son analogue complexe.

6.3. Applications holomorphes

Soient M et N deux courbes complexes. *On dira qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est* **holomorphe** *au point $z \in M$ si, pour toute carte locale de M, (U, φ) contenant z et toute carte locale (V, ψ) de N contenant $f(z)$ et tout voisinage ouvert W de z contenu dans U et tel que $f(W) \subset V$, l'application :*

(VII.13) $$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \psi^{-1}(V) \subset \mathbb{C}$$

est holomorphe au point $\varphi^{-1}(z)$. On dira que f est **holomorphe** *si elle est holomorphe en tout point de M.*

Une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si pour toute carte locale (U, φ) la fonction qui suit est holomorphe :

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{C}.$$

En tout point $z \in M$, la différentielle $d_z f$ d'une application holomorphe $M \stackrel{f}{\longrightarrow} N$ se réduit en fait à une application $\mathbb{C}$-linéaire $\partial_z f : T_z^{10} M \longrightarrow T_{f(z)}^{10} N$. Elle transforme un champ holomorphe sur M en un champ holomorphe sur N.

Si $f : M \longrightarrow N$ est holomorphe, bijective et f^{-1} holomorphe, on dit que f est un *biholomorphisme* de M sur N. On dit aussi que M et N sont *biholomorphiquement équivalentes.*

On notera $\mathcal{H}(M, N)$ l'ensemble des applications holomorphes de M dans N et tout simplement $\mathcal{H}(M)$ lorsque $N = \mathbb{C}$; ce dernier est une algèbre pour la multiplication des fonctions. L'ensemble des biholomorphismes (ou automorphismes) d'une courbe complexe est un groupe (pour la composition des applications) noté $\mathrm{Aut}(M)$; c'est bien sûr un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$.

Une surface différentiable ou courbe complexe est dite *connexe, compacte etc.* si elle est connexe, compacte *etc.* en tant qu'espace topologique. Par exemple $\mathbb{S}^2$, $P^2(\mathbb{R})$ et $P^1(\mathbb{C})$ sont connexes et compactes.

On dira qu'un groupe Γ (dénombrable, discret) *agit holomorphiquement* sur une courbe complexe M si, pour tout élément $\gamma \in \Gamma$, l'homéomorphisme $z \in M \longmapsto \gamma z \in M$ est un biholomorphisme. La définition de la conjugaison de deux actions se transpose au cas des courbes complexes : on demande à h dans le diagramme (VII.12) d'être biholomorphe et on dira que les actions sont *holomorphiquement conjuguées.* On a une version complexe de la proposition 5.2.

6.4. Proposition. *Soient M une courbe complexe et Φ une action holomorphe, libre et propre de Γ sur M. Alors le quotient $Z_\Phi = M/\Phi$ est une courbe complexe et la projection canonique $\pi : M \longrightarrow Z_\Phi$ est un biholomorphisme local i.e. tout point $z \in M$ admet un vosinage ouvert U tel que la restriction $\pi : U \longrightarrow \pi(U)$ soit un biholomorphisme. Si Ψ est une action holomorphiquement conjuguée à Φ, les courbes complexes Z_Φ et Z_Ψ sont holomorphiquement équivalentes.*

À titre d'exemple, reprenons celui que nous avons donné en 5.4.i). Soient $M = \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ et $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont toutes non nulles. On définit une action $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ par $\Phi(q, z) = z + \tau q$ où $z \in \mathbb{C}$, $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $q\tau = q_1\tau_1 + iq_2\tau_2$. Alors Φ est une action holomorphe, libre et propre ; le quotient M/Γ est une courbe complexe notée $\mathbb{T}_\tau$ et appelée *courbe elliptique.*

Contrairement au cas réel, la structure complexe de $\mathbb{T}_\tau$ dépend fortement du choix du vecteur $\tau \in \mathbb{R}^2$. Nous développons tout cela dans Complément 5.

6.5. Une dernière remarque

Nous avons vu qu'une application holomorphe préserve l'orientation (*cf.* III.1.5). Donc une courbe complexe est toujours une surface orientable pour la structure différentiable sous-jacente. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle presque toutes les surfaces que nous avons choisi de considérer dans ce texte sont orientables.

CHAPITRE VIII

SURFACES RIEMANNIENNES

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de *métrique riemannienne* sur une surface et le premier élément géométrique qu'elle permet de définir : la *longueur* d'une courbe tracée sur celle-ci. Nous donnons quelques exemples fondamentaux.

1. Métriques riemanniennes

Soit M une surface définie par un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$, T_xM est un espace vectoriel réel de dimension 2. Soient T_x^*M le dual de T_xM et $T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M$. Sur une carte locale (U, φ) de coordonnées (x_1, x_2), $\frac{\partial}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ sont des vecteurs tangents à M au point x ; notons dx_1 et dx_2 les éléments de T_x^*M définis par :

$$dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x)\right) = 1, \quad dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(x)\right) = 0, \quad dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x)\right) = 0, \quad dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}(x)\right) = 1.$$

Rappelons qu'une 1-*forme différentielle* sur M est une application $\omega : M \longrightarrow T^*M$ qui à tout x associe une forme linéaire ω_x sur T_xM de telle sorte que, sur toute carte (U, φ) de coordonnées locales (x_1, x_2), ω s'écrive :

$$\omega(x) = \omega_1(x)dx_1 + \omega_2(x)dx_2$$

où ω_1 et ω_2 sont des fonctions C^∞ sur U.

Soit S^2T_xM l'espace vectoriel réel des *formes bilinéaires symétriques* sur T_xM *i.e.* les applications $\varphi : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

i) les applications $\varphi(u, \cdot) : v \longrightarrow \varphi(u, v)$ et $\varphi(\cdot, v) : u \longrightarrow \varphi(u, v)$ soient linéaires ;
ii) pour tous $u, v \in T_xM$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

Tout endomorphisme $\gamma_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ induit un endomorphisme de S^2T_xM noté γ_x^* défini par $\gamma_x^*(\varphi)(u, v) = \varphi(\gamma_x(u), \gamma_x(v))$ pour $\varphi \in S^2T_xM$ et $u, v \in T_xM$. Posons :

$$\mathcal{S}^2 = \bigcup_{x\in M} S^2T_xM$$

C'est l'ensemble des couples $(x, g(x))$ où $x \in M$ et $g(x)$ une forme bilinéaire symétrique.

Par exemple, deux 1-formes α et β sur M permettent de définir une 2-forme symétrique sur M notée $\alpha \otimes \beta$ par $(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \alpha(x)(u)\beta(x)(v)$ pour $u, v \in T_xM$. On dira que $\alpha \otimes \beta$ est le *produit tensoriel* de α et β.

1.1. Définition. *Une* **métrique riemannienne** *sur M est une application $g : M \longrightarrow \mathcal{S}^2$ où, pour tout $x \in M$, $g(x)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive et telle que, sur toute carte (U, φ) de coordonnées locales (x_1, x_2), g s'écrive :*

$$g(x) = g_{11}(x)dx_1 \otimes dx_1 + g_{12}(x)dx_1 \otimes dx_2 + g_{21}(x)dx_2 \otimes dx_1 + g_{22}(x)dx_2 \otimes dx_2$$

où les $g_{k\ell}$ sont des fonctions C^∞ sur U avec $g_{12} = g_{21}$.

Cela signifie que, pour tout $x \in M$, $g(x)$ est un produit scalaire sur T_xM et que la famille $(g(x))_{x\in M}$ varie de manière C^∞ en x. Les fonctions $g_{k\ell}$ sont définies par les formules :

$$g_{k\ell}(x) = g(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x), \frac{\partial}{\partial x_\ell}(x)\right) \quad \text{avec} \quad k,\ell = 1,2.$$

1.2. Construction de métriques

Nous allons donner une construction explicite des métriques riemanniennes en utilisant la structure différentiable de M décrite à l'aide d'un atlas $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$; ceci montrera en particulier que de tels objets existent toujours. On supposera que le recouvrement $\{U_i\}$ est *localement fini* (*i.e.* tout point de M admet un voisinage compact qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts U_i).

Soit (U,φ) un élément de l'atlas $\mathcal{U}$. Pour la structure différentiable usuelle sur $\mathbb{R}^2$, l'homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U$ est un difféomorphisme de classe C^∞. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $d_x\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\varphi(x)}U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$; pour tous $u, v \in T_{\varphi(x)}U$ on pose :

$$g(x)(u,v) = \langle \varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v)\rangle.$$

Soit (x_1, x_2) un système de coordonnées sur U. Alors en chaque point $x \in U$, g a pour expression :

$$\text{(VIII.1)} \qquad g(x) = \sum_{k,\ell=1}^{2} g_{k\ell}(x)dx_k \otimes dx_\ell$$

qui n'est rien d'autre que celle donnée dans la définition 1.1.

Notons g^i la métrique riemannienne sur U_i que l'on vient de construire. Soit $(\rho_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$. Pour tout $x \in M$ on pose :

$$g(x) = \sum_{i\in I} \rho_i(x) g^i(x).$$

Il est facile de vérifier que g ainsi définie est une métrique riemannienne sur M. Une surface M munie d'une métrique riemannienne g est appelée *surface riemannienne* ; elle sera notée (M,g).

1.3. Longueur d'une courbe

On appelle *courbe* dans une surface M toute application γ continue d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans M ; on dira que γ est C^1 *par morceaux* s'il existe une partition dénombrable de I en intervalles I_n tels que la restriction de γ à l'intérieur de chacun des I_n soit une courbe de classe C^1 et les dérivées à gauche et à droite aux extrémités des I_n existent. On appelle *champ de vecteurs le long d'une courbe* $\gamma : I \longrightarrow M$ toute application différentiable qui à tout $t \in I$ associe un vecteur tangent $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Par exemple, si γ est différentiable, l'image $d_t\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ du champ canonique $\frac{\partial}{\partial t}$ sur I par la dérivée de γ est un champ de vecteurs le long de γ.

Supposons M munie d'une métrique riemannienne $g = \langle\ ,\ \rangle$ et soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe C^1 par morceaux. On appelle *longueur* du segment $\gamma([t_0,t_1])$ le nombre positif :

$$\text{(VIII.2)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left\langle \frac{d\gamma}{dt}(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)\right\rangle} dt$$

où l'intégrale est, bien entendu, calculée en dehors des points de discontinuité de $\frac{d\gamma}{dt}(t)$.

1.4. Définition. *Soient (M,g) et (N,h) deux surfaces riemanniennes et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. On dira que :*

(1) φ est une **isométrie locale** *si pour tout point $x \in M$ et tous vecteurs u et v tangents à M en x, on a : $h(y)(d_x\varphi(u), d_x\varphi(v)) = g(x)(u,v)$ où $y = \varphi(x)$. Ceci signifie que l'application linéaire $d_x\varphi : T_xM \longrightarrow T_yN$ est une isométrie. Si en plus φ est bijective on dira que φ est une* **isométrie** ;

(2) φ est **conforme** *s'il existe une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que, pour tout $x \in M$, on ait : $h(y)(d_x\varphi(u), d_x\varphi(v)) = e^{f(x)} \cdot g(x)(u,v)$. La fonction e^f est appelée* **facteur de conformité** *de φ.*

Comme on peut le voir facilement, une isométrie est une application conforme de facteur de conformité 1 et une application conforme préserve les angles. L'ensemble $\mathrm{Isom}(M,g)$ des isométries de la surface riemannienne (M,g) est un groupe appelé *groupe des isométries* de (M,g). L'ensemble $\mathrm{Conf}(M,g)$ des transformations bijectives conformes de M est appelé *groupe conforme* de (M,g). On a bien sûr :

$$\mathrm{Isom}(M) \subset \mathrm{Conf}(M) \subset \mathrm{Diff}(M).$$

2. Exemples de surfaces riemanniennes

Nous allons en donner parmi celles dites usuelles car elles sont naturelles et apparaissent souvent en tête des exemples.

2.1. Métrique usuelle sur $\mathbb{R}^2$

Sur $\mathbb{R}^2$ on a une base de champs de vecteurs globaux $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$. On définit une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^2$ par :

(VIII.3)
$$g(x) = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2.$$

Le groupe des isométries $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, g)$ de cette surface riemannienne n'est rien d'autre que celui des isométries affines de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$. C'est le produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{O}(2)$ où $\mathbb{R}^2$ est vu comme le groupe des translations et $\mathrm{O}(2)$ est engendré par les rotations de centre l'origine et la réflexion d'axe une droite vectorielle.

2.2. Graphe d'une fonction

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application C^∞. Alors son graphe $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in U \times \mathbb{R} \ : \ x_3 = f(x_1,x_2)\}$ est une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ à l'aide de l'application C^∞ :

$$F : (x_1,x_2) \in U \longrightarrow (x_1,x_2,f(x_1,x_2)) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour tout $x \in U$, les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ forment une base de l'espace tangent T_xU. Leurs images par la différentielle d_xF sont les vecteurs de $T_{F(x)}M \subset \mathbb{R}^3$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

Sur $\mathbb{R}^3$ on considère le produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$; on le restreint à chaque espace tangent $T_{F(x)}M$ et on obtient ainsi une métrique riemannienne g sur M. Pour tout $k = 1, 2$ posons $p_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Alors :

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \begin{cases} 1 + p_k^2 & \text{si } k = \ell \\ p_k p_\ell & \text{sinon.} \end{cases}$$

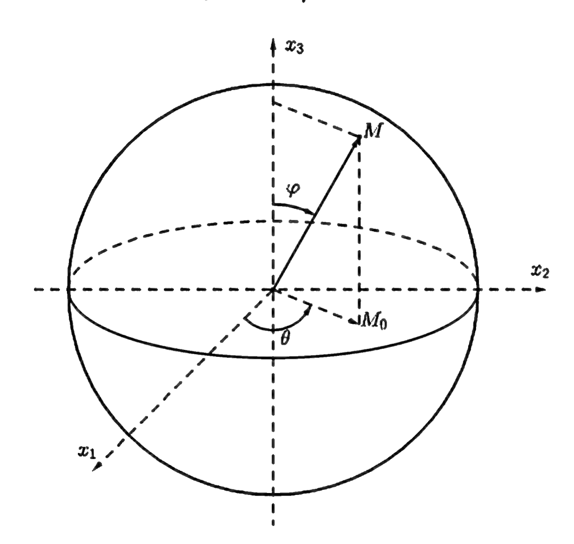
D'où l'expression de la métrique dans le système de coordonnées (x_1, x_2) :

(VIII.4) $$g = (1 + p_1^2)dx_1 \otimes dx_1 + (1 + p_2^2)dx_2 \otimes dx_2 + 2p_1p_2dx_1 \otimes dx_2.$$

2.3. La sphère

On note $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Si on ôte le pôle nord $= (0, 0, 1)$ et le pôle sud $=(0, 0, -1)$ l'ouvert M qui reste a pour repésentation paramétrique par les variables $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]0, \pi[$:

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta \sin\varphi \\ x_2 = \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = \cos\varphi \end{cases}$$



L'application $F : (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}\times]0, \pi[\longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in M$ n'est pas injective mais sa différentielle l'est en tout point (θ, φ). Elle est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

L'espace tangent à M au point $F(\theta, \varphi)$ est donc engendré par les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Les différents produits scalaires $\langle e_k, e_\ell \rangle$, pris dans $\mathbb{R}^3$, donnent la métrique riemannienne sur M :

(VIII.5) $$g = \sin^2\varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi.$$

Le groupe Isom($\mathbb{S}^2$) s'identifie au groupe O(3) des isométries linéaires de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ ou groupe des matrices orthogonales 3×3.

2.4. Le demi-plan $\mathbb{H}$

On note $\mathbb{H}$ le demi-espace $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 > 0\}$ sur lequel on définit la métrique riemannienne :

$$g = \frac{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2}{x_2^2} \tag{VIII.6}$$

Par la suite, nous donnerons de manière explicite le groupe d'isométries de cette surface riemannienne ainsi que d'autres propriétés en remarquant que :

$$\mathbb{H} = \{z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C} \ : \ x_2 > 0\}$$

et que la métrique en question s'écrit aussi sous la forme :

$$h = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z - \overline{z})^2} \tag{VIII.7}$$

où $dz = dx_1 + idx_2$ et $d\overline{z} = dx_1 - idx_2$. (L'utilisation de la coordonnée complexe se prête mieux au calcul que celle des coordonnées réelles.)

CHAPITRE IX
COURBURE

La *courbure* est le premier des invariants importants en géométrie riemannienne. Pour les surfaces, il y a différentes manières de l'introduire, notamment en passant par celle des courbes, mais nous avons choisi d'utiliser la notion de *connexion*. Nous ne faisons pas beaucoup de démonstrations mais nous détaillons le calcul des courbures des exemples fondamentaux. Les sections 1 et 2 sont une adaptation aux surfaces de ce qui est exposé pour les variétés en général dans [Cm].

1. Connexions

Soit M une surface de $\mathbb{R}^3$. Un champ de vecteurs sur M le long d'une courbe différentiable $\gamma : I \longrightarrow M$ est une application différentiable :

$$X : t \in M \longrightarrow (X_1(t), X_2(t), X_3(t)) \in T_{\gamma(t)}M.$$

On aimerait trouver une manière de dériver le champ X en demandant à la dérivée de rester tangente à M. Ce problème ne se pose pas uniquement dans ce cadre : de manière générale on est amené à chercher des *lois* permettant de dériver des objets tels que champ de vecteurs. Cela se fait à l'aide d'un outil géométrique appelé *connexion*, et qui est très utile en géométrie différentielle.

1.1. Connexions affines

Soit M une surface. On note TM son fibré tangent et $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M. On appelle *connexion affine* sur M toute application :

$$\nabla : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

$C^\infty(M)$-linéaire par rapport au premier facteur, additive par rapport au second et telle que $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$ (où $X(f)$ est la dérivée de f dans la direction de X).

Mettons-nous dans un ouvert de coordonnées locales (U, x_1, x_2). Alors on a une base de champs de vecteurs sur U : $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ et $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$. Pour connaître la connexion ∇, il suffit de connaître les quantités $\nabla_{X_i} X_j$ avec $i, j = 1, 2$; mais celles-ci s'écrivent :

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k X_k \qquad \text{(IX.1)}$$

où Γ_{ij}^k sont des fonctions C^∞ sur U. La connaissance (localement) de ∇ revient donc à celle des fonctions Γ_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2$ appelées *symboles de Christoffel* de la connexion ∇.

On suppose M munie d'une connexion affine ∇. Soient $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe différentiable et X un champ de vecteurs le long de γ. Alors :

Il existe une unique loi qui associe à X un champ de vecteurs le long de γ noté $\frac{DX}{dt}$ appelé **dérivée covariante** *de X le long de γ et vérifiant les proporiétés suivantes :*

i) $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$,
ii) $\frac{D}{dt}(fX) = f\frac{DX}{dt} + \frac{df}{dt}X$,
iii) *si X est la restriction à l'image de γ d'un champ $\widetilde{X}$ sur M alors* $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\widetilde{X}$.

Ecriture locale explicite

On suppose que l'ouvert (U, x_1, x_2) de coordonnées locales est tel que $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. On peut écrire $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ et $X = \sum_{j=1}^{2} f_j X_j$ avec $f_j \in C^\infty(U)$. Alors, en utilisant les propriétés énoncées de la dérivée covariante, on établit :

$$\frac{DX}{dt} = \sum_{j=1}^{2} \frac{df_j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{dx_i}{dt} f_j \nabla_{X_i} X_j$$

ou encore :

$$\frac{DX}{dt} = \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} X_k. \tag{IX.2}$$

Soit X un champ de vecteurs le long d'une courbe γ. On dira que X est *parallèle* si sa dérivée covariante $\frac{DX}{dt}$ est identiquement nulle.

Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe, $t_0 \in I$ et X_0 un vecteur de $T_{\gamma(t_0)}M$. Alors on peut construire un champ unique X parallèle le long de toute la courbe γ et prenant la valeur X_0 au point t_0. Un tel champ est appelé *transport parallèle* de X_0 le long de γ. Si on l'écrit sous la forme $X = \sum_{j=1}^{2} f_j X_j$, ses composantes f_j sont les solutions du système différentiel :

$$\frac{df_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} f_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \text{avec} \quad k = 1, 2$$

qui sont uniques en raison de la condition initiale $(f_1(t_0), f_2(t_0)) = X_0$.

Une connexion affine ∇ sur M est dite *symétrique* si elle vérifie pour tous champs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la relation :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{IX.3}$$

Localement pour $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ on a $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, Y_j] = 0$ et donc pour tous $i, j, k = 1, 2 : \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

1.2. Connexions riemanniennes

Soit (M, g) $(g = \langle \; , \; \rangle)$ une surface riemannienne munie d'une connexion affine ∇. On dira que ∇ est *compatible* avec g si, pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a :

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \tag{IX.4}$$

En particulier si X, Y sont des champs de vecteurs définis le long d'une courbe γ on a :

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle.$$

On arrive à un théorème fondamental qui assure l'existence d'une connexion affine symétrique compatible avec une métrique g.

Théorème de Levi-Civita. *Soit M une surface munie d'une métrique riemannienne g qu'on notera aussi $\langle\ ,\ \rangle$. Alors, il existe sur M une unique connexion affine ∇ symétrique et compatible avec g. Elle est appelée* **connexion de Levi-Civita** *de la surface riemannienne (M, g).*

Un calcul simple montre que ∇ est définie de façon unique par l'identité :

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\}$$

Faisant $X = X_j$, $Y = X_i$ et $Z = X_k$ et $\langle X_i, X_j\rangle = g_{ij}$ on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{2} g_{\ell k}\Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right).$$

D'où l'on déduit, en notant $(g^{\ell k})$ l'inverse de la matrice $(g_{\ell k})$:

$$\text{(IX.5)} \qquad \Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} g^{\ell k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right).$$

1.3. Géodésiques

Soit $g = \langle\ ,\ \rangle$ une métrique riemannienne sur M. Une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ est dite *géodésique* si $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ identiquement. Cela se traduit par le système d'équations différentielles :

$$\text{(IX.6)} \qquad \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad k = 1, 2$$

où les $x_i(t)$ sont les composantes de γ dans le système de coordonnées (U, x_1, x_2).

Si γ est une géodésique, la restriction de γ à tout intervalle fermé $[t_0, t_1]$ est appelée *segment de géodésique* de $\gamma(t_0)$ à $\gamma(t_1)$. On a :

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right), \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle = 0.$$

La norme $\alpha = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|$ du vecteur $\frac{d\gamma}{dt}$ est donc constante. On en déduit alors que :

$$s(t) = \text{longueur}([\gamma(t_0), \gamma(t)]) = \int_{t_0}^{t}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| dt = \alpha(t - t_0).$$

Si $\alpha = 1$ la géodésique est dite *normalisée.* En remplaçant t par s on *paramètre γ par la longueur de l'arc.* Quand on peut faire cela sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ on dira que γ est *complète.* La surface riemannienne (M, g) est alors dite *complète* si toute géodésique est complète.

Les géodésiques sont les courbes qui minimisent localement la distance entre les points de la surface.

2. Courbure

Une *métrique riemannienne* sur une surface permet d'y introduire un invariant fondamental appelé *courbure*. Celle-ci a pour fonction de distinguer à quel point un morceau de cette surface peut être « loin » d'un disque plan. On peut illustrer cela en constatant qu'il est impossible de coller de *façon isométrique* la pelure d'une orange sur le plan d'une table ! C'est cet invariant que nous nous proposons de définir dans ce paragraphe.

Dans toute la suite, M sera une surface munie d'une métrique riemannienne g et de sa connexion de Levi-Civita ∇ associée.

2.1. Tenseur de courbure

On appelle *courbure* de (M,g) l'application qui à tout $(X,Y) \in \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$ associe l'application $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ définie par :

(IX.7) $$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z).$$

Pour tous $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$, posons :

(IX.8) $$(X,Y,Z,T) = \langle R(X,Y)Z, T\rangle.$$

La courbure R de (M,g) vérifie les propriétés qui suivent dont la démonstration consiste en de simples calculs.

i) L'application $(X,Y) \longrightarrow R(X,Y)$ est $C^\infty(M)$-bilinéaire.
ii) Pour tous $(X,Y) \in \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$, l'application $Z \longrightarrow R(X,Y)Z$ est $C^\infty(M)$-linéaire.
iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (*identité de Bianchi*).
iv) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$ et $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$.
v) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$.

Ecriture locale

Comme toujours on pose $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $i = 1,2$. Le champ $R(X_i,X_j)X_k$ s'écrit dans la base (X_1,X_2) :

(IX.9) $$R(X_i,X_j)X_k = \sum_{\ell=1}^{2} R^\ell_{ijk} X_\ell$$

où les R^ℓ_{ijk}, $i,j,k,\ell = 1,2$ sont des fonctions C^∞ sur l'ouvert de coordonnées locales (U, x_1, x_2). Elles s'expriment en fonction des symboles de Christoffell Γ^k_{ij}. Il suffit de voir que $R(X_i,X_j)X_k = \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k$ qui donne :

(IX.10) $$R^s_{ijk} = \sum_{\ell=1}^{2}\Gamma^\ell_{ik}\Gamma^s_{j\ell} - \sum_{\ell=1}^{2}\Gamma^\ell_{jk}\Gamma^s_{i\ell} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}.$$

De même :

(IX.11) $$(X_i,X_j,X_k,X_s) = R_{ijks} = \langle R(X_i,X_j)X_k, X_s\rangle = \sum_{l=1}^{2} R^\ell_{ijk} g_{\ell s}.$$

Les fonctions R_{ijks} vérifient les relations suivantes découlant immédiatement de celles du « crochet » (, , ,) :

$$\text{(IX.12)} \qquad \begin{cases} R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0 \\ R_{ijks} = -R_{jiks} \\ R_{ijks} = -R_{ijsk} \\ R_{ijks} = R_{ksij} \end{cases}$$

2.2. La courbure sectionnelle

On considère toujours une surface M munie d'une métrique riemannienne $g = \langle\ ,\ \rangle$ et de la connexion de Levi-Civita associée.

Lemme. *Soient $x \in M$ et (X, Y) une base de T_xM. Alors la quantité qui suit ne dépend pas de (X, Y) :*

$$\text{(IX.13)} \qquad \kappa(X, Y) = \frac{(X, Y, X, Y)}{||X||^2||Y||^2 - \langle X, Y\rangle^2}.$$

La démonstration est facile bien qu'elle soit un peu calculatoire. Le nombre $\kappa(X, Y)$ (où (X, Y) est une base quelconque de T_xM) sera noté $\kappa(x)$ et appelé *courbure sectionnelle* de (M, g) au point x. C'est une fonction C^∞ sur la surface M. On dira que (M, g) est à *courbure constante* si cette fonction est constante.

3. Exemples de calcul

3.1. La surface euclidienne $\mathbb{R}^2$

Les champs $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$ sont définis globalement, commutent et forment une base de l'espace tangent en chaque point $x \in \mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la métrique ;

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2$$

qui a pour matrice associée la matrice identité *i.e.* :

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\nabla_{X_i} X_j = 0$ pour tous $i, j = 1, 2$. Comme, par définition, les symboles de Christoffel sont donnés par :

$$\text{(IX.14)} \qquad \Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} g^{\ell k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k}g_{ij}\right)$$

ils sont identiquement nuls. Par suite la *courbure sectionnelle est identiquement nulle.*

Les géodésiques de $\mathbb{R}^2$ sont les courbes $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ qui vérifient le système différentiel :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2x_2}{dt^2}(t) = 0$$

et sont les droites affines $\gamma(t) = (a_1t + b_1, a_2t + b_2)$. Elles sont donc complètes.

3.2. La sphère $\mathbb{S}^2$

La sphère $\mathbb{S}^2$ étant plongée dans $\mathbb{R}^3$, elle hérite d'une métrique riemannienne dont l'écriture en coordonnées sphériques est $g = \sin^2\varphi d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi$. La matrice de g s'écrit donc :

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour adapter les calculs aux formules dont on dispose on posera $x_1 = \theta$ et $x_2 = \varphi$. Les champs $\frac{\partial}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}$ seront respectivement $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. On a bien entendu $[X_1, X_2] = 0$. La formule (IX.13) donne :

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \\ \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant la quantité $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2\rangle$. On a :

$$\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{X_2}(\Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^2_{11}X_2) = \nabla_{X_2}(-\cos\varphi\sin\varphi X_2) = -\cos(2\varphi)X_2$$

et :

$$\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 = \nabla_{X_1}(\Gamma^1_{21}X_1 + \Gamma^2_{21}X_2) = \nabla_{X_1}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}X_1\right) = -(\cos\varphi)^2 X_2.$$

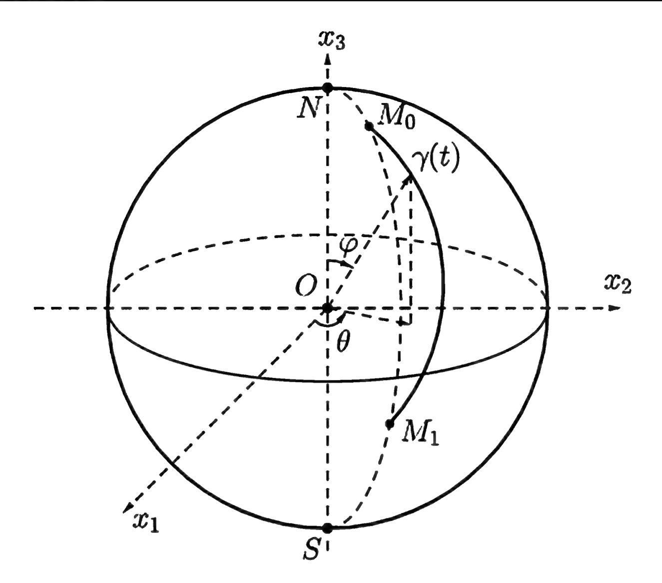
Finalement on obtient $R(X_1, X_2)X_1 = \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 - \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 = \sin^2\varphi X_2$ et donc $(X_1, X_2, X_1, X_2) = \sin^2\varphi$. La formule donnant la courbure sectionnelle par rapport à la base (X_1, X_2) est :

$$\kappa(X_1, X_2) = \frac{(X_1, X_2, X_1, X_2)}{||X_1||^2||X_2||^2 - \langle X_1, X_2\rangle^2}$$

Comme $||X_1||^2 = \sin^2\varphi$, $||X_2|| = 1$ et X_1 et X_2 orthogonaux on obtient $\kappa(X_1, X_2) = 1$.

La sphère $\mathbb{S}^2$ munie de sa métrique standard (celle induite par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$) est une *surface riemannienne compacte orientable simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à* 1.

Déterminons les géodésiques de $\mathbb{S}^2$. Soient M_0 et M_1 deux points sur la sphère $\mathbb{S}^2$ non diamétralement opposés. Quitte à effectuer un changement de repère à l'aide d'une rotation linéaire (qui est une isométrie de $\mathbb{S}^2$), on peut supposer qu'ils se situent sur un même méridien (*cf.* dessin ci-dessous). Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ de classe C^1 tel que $\gamma(0) = M_0$ et $\gamma(1) = M_1$ et que, pour tout $t \in [0,1]$, le point $\gamma(t)$ ait pour coordonnées angulaires $(\theta(t), \varphi(t))$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$ et $\varphi \in]0, \pi[$.



La métrique riemannienne sur l'ouvert de $\mathbb{S}^2$, image de $]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ par la représentation paramétrique, s'écrit $g = (\sin\varphi)^2 d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi$. Donc la longueur du chemin γ est donnée par la formule :

$$\ell(\gamma; M_0, M_1) = \int_0^1 \sqrt{(\sin(\varphi(t))^2\theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2} dt.$$

D'où l'estimation :

$$\ell(\gamma; M_0, M_1) = \int_0^1 \sqrt{(\sin(\varphi(t))^2\theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2} dt \geq \int_0^1 |\varphi'(t)| dt \geq |\varphi(1) - \varphi(0)|.$$

L'égalité a lieu si $\theta'(t) = 0$ *i.e.* si la fonction $\theta(t)$ est constante. Cela signifie que la courbe est sur le plan passant par les trois points O, M_0 et M_1, donc γ est un arc du grand cercle que trace ce plan sur la sphère.

Le même raisonnement peut être mené sur une sphère de rayon quelconque (et pas forcément centrée à l'origine). On a donc l'assertion suivante :

Soit $S(0, R)$ la sphère de rayon R centrée à l'origine et munie de la métrique induite par celle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Alors les géodésiques de cette surface riemannienne sont les grands cercles i.e. les cercles de $\mathbb{R}^3$ centrés à l'origine et de rayon R.

3.3. Le demi-espace $\mathbb{H}$

On rappelle que $\mathbb{H}$ est le demi-plan supérieur $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ muni de la métrique riemannienne :

$$g = \frac{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2}{x_2^2}$$

dont la matrice associée est $g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}$. On calcule les symboles de Christoffel de la même manière que précédemment :

$$(\Gamma_{ij}^1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2} \\ -\frac{1}{x_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (\Gamma_{ij}^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 =&\nabla_{X_2}(\Gamma^1_{11}X_1+\Gamma^2_{11}X_2)\\ =&\nabla_{X_2}\left(\frac{1}{x_2}X_2\right)\\ =&\frac{1}{x_2}\nabla_{X_2}X_2-\frac{1}{x_2^2}X_2\\ =&\frac{1}{x_2}\left(\Gamma^1_{22}X_1+\Gamma^2_{22}X_2\right)-\frac{1}{x_2^2}X_2\\ =&-\frac{2}{x_2^2}X_2\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 =&\nabla_{X_1}(\Gamma^1_{21}X_1+\Gamma^2_{21}X_2)\\ =&\nabla_{X_1}\left(-\frac{1}{x_2}X_1\right)\\ =&-\frac{1}{x_2^2}X_2\end{aligned}$$

D'où :

$$R(X_1,X_2)X_1=\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1-\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1=-\frac{1}{x_2^2}X_2$$

et par suite :

$$(X_1,X_2,X_1,X_2)=\langle R(X_1,X_2)X_1,X_2\rangle=\langle-\frac{1}{x_2^2}X_2,X_2\rangle=-\frac{1}{x_2^2}\langle X_2,X_2\rangle=-\frac{1}{x_2^4}$$

La courbure sectionnelle est finalement :

$$\kappa(X_1,X_2)=\frac{(X_1,X_2,X_1,X_2)}{||X_1||^2||X_2||^2-\langle X_1,X_2\rangle^2}=-1$$

car $||X_1||^2||X_2||^2=\left(\frac{1}{x_2^2}\right)\left(\frac{1}{x_2^2}\right)$ et $\langle X_1,X_2\rangle=0$ (les vecteurs X_1 et X_2 étant orthogonaux).

Le demi-plan $\left(\mathbb{H},\frac{dx_1^2+dx_2^2}{x_2^2}\right)$ est une *surface riemannienne orientable et simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à* -1.

Les surfaces $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{H}$ seront supposées munies respectivement des métriques que l'on vient de considérer.

3.4. Un théorème de classification. *Soit (M,g) une surface riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle κ constante. Alors si :*

(1) $\kappa=0$, *M est isométrique à $\mathbb{R}^2$ (cas parabolique)* ;

(2) $\kappa=1$, *M est isométrique à $\mathbb{S}^2$ (cas elliptique)* ;

(3) $\kappa=-1$, *M est isométrique à $\mathbb{H}$ (cas hyperbolique).*

CHAPITRE X

GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE DES SURFACES

Ce chapitre est consacré exclusivement au demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$. Nous y étudions son groupe d'isométries et ses géodésiques ainsi qu'un exemple de ses sous-groupes discrets Γ opérant proprement et librement sur $\mathbb{H}$. Les quotients $\mathbb{H}/\Gamma$ sont ainsi des surfaces riemanniennes à courbure constante égale à -1 ; on les appelle *surfaces hyperboliques*. Pour en savoir plus sur la géométrie hyperbolique voir [BP], [Ra], [ST] et [Ve].

1. Groupe d'isométries de $\mathbb{H}$

Selon le besoin, on utilisera les coordonnées réelles (x, y) pour repérer un point ou sa coordonnée complexe $z = x + iy$. Rappelons la :

1.1. Définition. *Soient (M, g) et (N, h) deux surfaces riemanniennes. Une application $\gamma : M \longrightarrow N$ est dite* **conforme** *s'il existe une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout point $z \in M$ (d'image $w = \gamma(z) \in N$) et tous vecteurs $u, v \in T_zM$, on ait :*

$$h(d_z\gamma(u), d_z\gamma(v)) = e^{f(z)}g(u, v). \tag{X.1}$$

(La fonction e^f est appelée **facteur de conformité** *de γ.) C'est aussi équivalent à dire que γ préserve les angles orientés : l'angle (u, v) dans T_zM est égal à l'angle $(d_z(u), d_z(v))$ dans T_wN.*

Une isométrie locale directe γ est une application conforme ; son facteur de conformité est la fonction identiquement égale à 1. Si $\gamma : M \longrightarrow N$ est bijective et conforme, on dira que γ est une *équivalence conforme* entre M et N ; une équivalence conforme de (M, g) sur elle-même est appelée *transformation conforme* de (M, g). L'ensemble des transformations conformes de (M, g) est un groupe qu'on note $\mathrm{Conf}(M, g)$ et qu'on appelle *groupe conforme* de la surface riemannienne (M, g). Bien sûr, $\mathrm{Isom}^+(M, g)$ (groupe des isométries directes) est un sous-groupe de $\mathrm{Conf}(M, g)$.

1.2. Quelques rappels

On se situe dans le plan $\mathbb{R}^2$ qu'on identifie au plan complexe par $(x, y) \longmapsto z = x + iy$. Le produit scalaire usuel $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$ sur $\mathbb{R}^2$ n'est rien d'autre que la partie réelle du produit hermitien $\langle z, w \rangle = z\overline{w}$ sur $\mathbb{C}$. L'orientation sur $\mathbb{R}^2$ est celle donnée par sa base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

• *Une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ non nulle qui conserve les angles (orientés ou pas) est une similitude, c'est-à-dire :*

- *le produit d'une rotation et d'une homothétie de même centre si la transformation φ préserve les angles orientés ;*
- *le produit d'une réflexion, d'une rotation et d'une homothétie de même centre si φ ne préserve pas les angles orientés.*

Preuve. Quitte à remplacer φ par $\varphi \circ s$ où s est la réflexion d'axe celui des abscisses, on peut supposer que φ préserve l'orientation.

Soit r la rotation qui amène le vecteur $\varphi(e_1)$ sur $\tau_1 e_1$ avec $\tau_1 > 0$. Posons $\psi = r \circ \varphi$. Comme ψ préserve les angles orientés et qu'elle fixe la direction et le sens de e_1, l'image de

e_2 par ψ est un vecteur du type $\tau_2 e_2$. Ce qui nous donne $\psi(e_1+e_2) = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2$. Comme, encore une fois ψ préserve les angles orientés et fixe la direction et le sens de e_1, $\psi(e_1+e_2)$ est de la forme $\tau(e_1+e_2)$, ce qui impose $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Donc $r \circ \varphi$ est l'homothétie centrée à l'origine et de rapport τ ; par suite, φ est la similitude directe centrée à l'origine et de rapport τ et d'angle $\theta = (e_1, \varphi(e_1))$. □

En coordonnées complexes, une similitude $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ s'écrit $\varphi(z) = \lambda z$ si elle conseve l'orientation et $\varphi(z) = \lambda \overline{z}$ sinon (avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$).

• *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Une application $f : U \longrightarrow V$ est conforme si, et seulement si, f est holomorphe et vérifie $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.*

Preuve. L'implication (f conforme $\Longrightarrow$ f holomorphe et $f'(z) \neq 0$) résulte de ce qu'on vient de voir précédemment. L'implication réciproque est une conséquence du fait que les conditions de Cauchy-Riemann disent exactement que la différentielle $\varphi = d_z f$ de f est une similitude. Nous laissons le soin au lecteur de mettre tout cela en forme. □

Nous allons exploiter le matériel que nous avons introduit à la section 6 du chapitre V pour déterminer explicitement le groupe des isométries du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$.

1.3. Théorème. *Toute isométrie du demi-plan ouvert $\mathbb{H} = \{x+iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ est de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $f(z) = \frac{-a\overline{z}+b}{-c\overline{z}+d}$ avec a, b, c, d réels tels que $ad - bc = 1$.*

Démonstration. Une isométrie qui préserve l'orientation est une transformation conforme. Elle est donc de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des réels tels que $ad - bc = 1$. Si elle ne préserve pas l'orientation, elle est du type $f(z) = \frac{-a\overline{z}+b}{-c\overline{z}+d}$ où a, b, c, d sont aussi des réels tels que $ad - bc = 1$.

Reste à montrer qu'une transformation de la forme $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ou $f(z) = \frac{-a\overline{z}+b}{-c\overline{z}+d}$ avec a, b, c, d réels tels que $ad - bc = 1$ est une isométrie de $\mathbb{H}$. On traitera seulement la première forme ; le cas de la seconde s'en déduit immédiatement.

Comme on l'a déjà fait remarquer, la métrique hyperbolique peut aussi s'écrire en la coordonnée complexe z sous la forme :

$$\langle\, ,\, \rangle_z = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z-\overline{z})^2}. \tag{X.2}$$

Dire que f est une isométrie, c'est dire qu'elle préserve cette métrique. Ceci signifie de façon concrète que, pour tout $z \in \mathbb{H}$, on a :

$$\langle\, ,\, \rangle_{f(z)} = -\frac{4d\,(f(z)) \otimes d\overline{f(z)}}{\left(f(z) - \overline{f(z)}\right)^2} = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z-\overline{z})^2} = \langle\, ,\, \rangle_z.$$

(i) La métrique $\langle\, ,\, \rangle_z$ est invariante par toute translation $z \longmapsto z+b$ (avec b réel) car :

$$-\frac{4d(z+b) \otimes d\left(\overline{z+b}\right)}{\left((z+b) - (\overline{z+b})\right)^2} = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z-\overline{z})^2} = \langle\, ,\, \rangle_z.$$

(ii) Elle est invariante par l'application $z \longmapsto -\frac{1}{z}$ car :

$$-\frac{4d\left(-\frac{1}{z}\right) \otimes d\left(\overline{-\frac{1}{z}}\right)}{\left(-\frac{1}{z} - \left(\overline{-\frac{1}{z}}\right)\right)^2} = -4\frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)dz \otimes \left(\frac{1}{\overline{z}^2}\right)d\overline{z}}{\frac{(z-\overline{z})^2}{(z\overline{z})^2}} = -\frac{4dz \otimes d\overline{z}}{(z-\overline{z})^2} = \langle\, ,\, \rangle_z.$$

(iii) Et finalement, il est immédiat de voir qu'elle est aussi invariante par toute homothétie $z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Considérons la transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Si $c = 0$, $ad = 1$ et par suite $\frac{a}{d} > 0$; donc f est de la forme $f(z) = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = \frac{a}{d} > 0$; f est donc une isométrie en vertu des points (i) et (iii). Si $c \neq 0$, on peut écrire f sous la forme :

(X.3) $$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2 z + cd}.$$

Par suite f laisse invariante la métrique $\langle\ ,\ \rangle$ en vertu des points (i), (ii) et (iii). La transformation f est finalement une isométrie de $\mathbb{H}$. □

2. Géodésiques

On rappelle qu'une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ (I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) C^1 par morceaux tracée sur une surface riemannienne (M, g) est une géodésique si elle minimise localement la distance entre les points : le plus court chemin pour aller du point $\gamma(t_0)$ au point $\gamma(t)$ ($t_0, t \in I$ proches) est $\gamma([t_0, t])$. Nous allons décrire explicitement les géodésiques du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$. Mais avant commençons par une :

2.1. Remarque. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}$ une géodésique. Alors son image $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}$ par toute isométrie f de $\mathbb{H}$ est une géodésique.*

Cette remarque est valable dans toute surface riemannienne (M, g). Plus même : tout ce qui est défini à partir de la métrique (connexion riemannienne, courbure, géodésique...) se « conserve » par le groupe $\mathrm{Isom}(M, g)$ des isométries de (M, g).

2.2. Proposition. *Soient p_0 et p_1 deux points du demi-plan $\mathbb{H}$ ayant même abscisse x_0 et d'ordonnées respectives y_0 et y_1. Alors la portion de la droite (p_0p_1) contenue dans $\mathbb{H}$ est une géodésique complète.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}$ une courbe de classe C^1 telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$ s'écrivant $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{longueur}(\gamma([0,1])) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\
&\geq \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| \\
&= |\mathrm{Log}(y_1) - \mathrm{Log}(y_0)|.
\end{aligned}$$

La quantité $|\mathrm{Log}(y_1) - \mathrm{Log}(y_0)|$ n'est rien d'autre que la longueur hyperbolique du segment $[p_0p_1]$. Si la courbe γ est une géodésique, l'égalité :

$$\mathrm{longueur}(\gamma([0,1])) = |\mathrm{Log}(y_1) - \mathrm{Log}(y_0)|$$

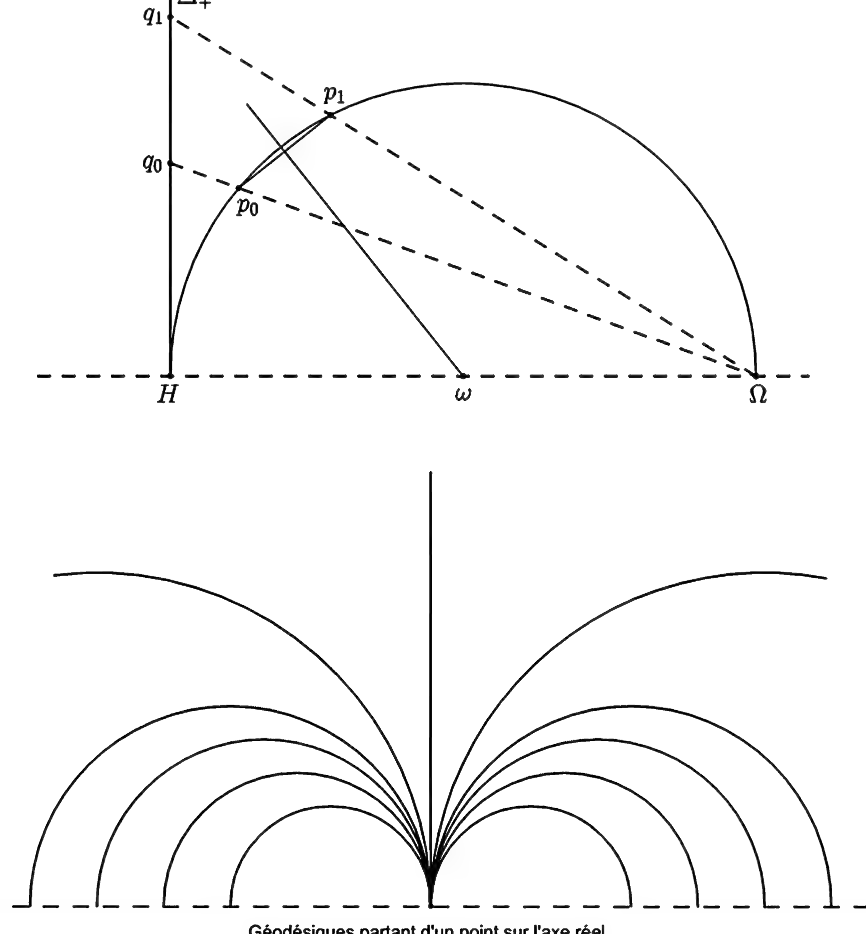
doit avoir lieu, sinon la courbe $\tau(t) = x_0 + iy(t)$ avec $t \in [0, 1]$ (qui joint aussi p_0 à p_1) sera aussi de plus courte longueur. Toute demi-droite ouverte contenue dans $\mathbb{H}$ commençant en un point de l'axe réel et perpendiculaire à celui-ci est une géodésique complète : en effet, elle est paramétrée sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ par $\gamma(t) = x_0 + ie^t$. □

2.3. Proposition. *Soient p_0 et p_1 deux points de $\mathbb{H}$ ayant des abscisses respectives x_0 et x_1 différentes. Alors le demi-cercle contenu dans $\mathbb{H}$, centré sur l'axe réel et passant par les points p_0 et p_1 est une géodésique complète.*

Démonstration. Comme les points p_0 et p_1 n'ont pas la même abscisse, la médiatrice du segment $[p_0p_1]$ coupe l'axe réel en un point ω. Le demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre ω et passant par p_0 (et donc aussi par p_1) coupe l'axe réel en deux points Ω et H. Notons ρ le rayon de $\mathcal{C}$ (on a $0 < \rho = \omega\Omega = \omega H = \omega p_0 = \omega p_1$) et posons $\kappa = 4\rho^2$. L'inversion $\mathcal{I}$ de pôle Ω et de puissance κ s'écrit :

$$\mathcal{I}(z) = \frac{\kappa}{\overline{z} - a} + a = \frac{(-0)\overline{z} + \sqrt{\kappa}}{-\left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\overline{z} + \left(-\frac{a}{\sqrt{\kappa}}\right)} + a \tag{X.4}$$

(où a est l'abscisse de Ω, qui est aussi son affixe). Cette inversion envoie le demi-cercle $\mathcal{C}$ sur la demi-droite Δ_+ (contenue dans $\mathbb{H}$) issue du point H et orthogonale à l'axe réel. Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{H}$ est une courbe géodésique telle que $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$, sa transformée $\mathcal{I} \circ \gamma$ par l'isométrie $\mathcal{I}$ est aussi une géodésique, donc sera contenue dans Δ_+ ; par suite γ est forcément contenue dans $\mathcal{C}$. On en conclut que la géodésqiue complète passant par p_0 et p_1 est l'image inverse par $\mathcal{I}$ de la demi-droite Δ_+, c'est-à-dire le demi-cercle $\mathcal{C}$. □



Géodésiques partant d'un point sur l'axe réel

3. Surfaces hyperboliques

L'objet de cette section est d'en donner la définition et un exemple de surface compacte obtenue comme quotient de $\mathbb{H}$ par l'action d'un groupe d'isométries.

3.1. SL(2,R) et son action sur $\mathbb{H}$

On rappelle que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et de déterminant égal à 1. C'est une partie de $\mathbb{R}^4$ donnée par l'injection naturelle :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \hookrightarrow (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$$

qui hérite donc d'une structure d'espace topologique. Comme l'application :

$$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow ad - bc \in \mathbb{R}$$

est continue, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}^4$, donc un espace localement compact. En plus les applications naturelles :

$$(A,B) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow AB \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

et :

$$A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow A^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

sont indéfiniment différentiables (et même analytiques réelles). Ceci confère évidemment à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ une structure de *groupe de Lie.*

On rappelle qu'une *transformation homographique* de $\mathbb{H}$ s'écrit $\gamma : z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et tels que $ad - bc \neq 0$; elle est définie bien entendu pour $z \neq -\frac{d}{c}$. Une telle transformation est donc associée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Un calcul facile montre que si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Im(z)(\gamma(z)) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} \tag{X.5}$$

et donc γ préserve $\mathbb{H}$ et est définie partout sur $\mathbb{H}$. On vérifie qu'au produit de deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ correspond la composition $\gamma\gamma'$. Comme les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ définissent la même transformation, la condition $ad - bc \neq 0$ (qui assure la bijectivité de γ) peut être remplacée par $ad - bc = 1$. Ainsi le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}$. Cette action est *holomorphe* et *isométrique i.e.* la transformation γ associée à une matrice de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est biholomorphe et est une isométrie. Notons $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ le groupe des transformations biholomorphes de $\mathbb{H}$. On a donc un morphisme de groupes :

$$\rho : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$

où γ est la transformation $z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$. Le noyau de ρ est constitué des matrices I et $-I$ et induit donc un homomorphisme injectif :

$$\rho : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{I,-I\} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H}).$$

Nous travaillerons toujours sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ que nous confondrons (modulo le sous-groupe $\{I,-I\}$) avec $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ et dont on notera un élément indifféremment γ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

3.2. Proposition. *L'action de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{H}$ *est transitive i.e. pour tous* $z, z' \in \mathbb{H}$ *il existe un élément* $\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *tel que* $z = \phi(z')$. *En d'autres termes cette action n'a qu'une seule orbite.*

Démonstration. Écrivons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Un calcul immédiat permet de vérifier que les éléments : $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ et $\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & -x' \\ 0 & y' \end{pmatrix}$ transforment z et z' en le point i : $\gamma(z) = i$ et $\gamma'(z') = i$. Par suite, l'élément $\phi = \gamma^{-1} \circ \gamma'$ tranforme z' en z. □

Nous allons terminer par la notion de surface hyperbolique. Elle sera donnée de façon très sommaire car faire les choses en détail nécessite un peu plus de matériel.

Un *sous-groupe discret* de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est une partie Γ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ qui est à la fois discrète (son intersection avec tout compact est finie) et un sous-groupe.

3.3. Théorème. *Soit* Γ *un sous-groupe discret de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. *On considère son action naturelle sur* $\mathbb{H}$, *celle induite par* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *en tant que groupe d'isométries du demi-plan hyperbolique. Alors :*

i) *Le groupe* Γ *agit proprement sur* $\mathbb{H}$, *c'est-à-dire, pour tout compact* K *du demi-plan* $\mathbb{H}$, *l'ensemble* $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ *est fini.*

ii) *Si en plus* Γ *agit librement i.e. le groupe d'isotropie* Γ_x *de tout point* x *est trivial, le quotient* $M = \mathbb{H}/\Gamma$ *est une surface orientable. La métrique hyperbolique sur* $\mathbb{H}$ *induit sur* M *une métrique riemannienne dont la courbure sectionnelle est égale à* -1.

Pour la démonstration, voir [Fr].

Les surfaces de la forme $M = \mathbb{H}/\Gamma$ sont appelées *surfaces hyperboliques.* On démontre (loin d'être trivial) que toute surface riemannienne orientable à courbure constante égale à -1 est de ce type. Pour en construire, il faut donc trouver des sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ qui agissent librement sur $\mathbb{H}$. Nous allons nous restreindre au cas des surfaces compactes. On a le théorème qui suit dont on peut trouver une démonstration dans [Ve].

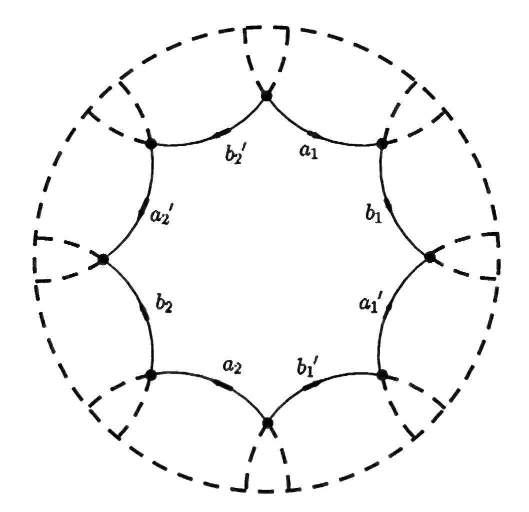
3.4. Théorème de Poincaré. *Soient* $g \geq 2$ *un entier et* Δ_g *un polygone ayant* $4g$ *côtés (des segments de géodésiques)* $a_1, a_1', b_1, b_1' \cdots, a_g, a_g', b_g, b_g'$. *On suppose que tous les sommets de* Δ_g *sont dans* $\mathbb{H}$, *pour tout* $\ell \in \{1, \cdots, g\}$, *les côtés* a_ℓ *et* b_ℓ *sont isométriques respectivement aux côtés* a_ℓ' *et* b_ℓ' *et qu'une orientation est donnée sur chacun des côtés de telle sorte qu'un parcours sans recul sur le bord soit dans le sens* $a_1 b_1 {a_1'}^{-1} {b_1'}^{-1} \cdots a_g b_g {a_g'}^{-1} {b_g'}^{-1}$. *Alors :*

i) *Pour* $\ell \in \{1, \cdots, g\}$, *il existe des isométries* γ_ℓ *et* σ_ℓ *de* $\mathbb{H}$ *préservant l'orientation et telles que* $\gamma_\ell(a_\ell) = a_\ell'$ *et* $\sigma_\ell(b_\ell) = b_\ell'$.

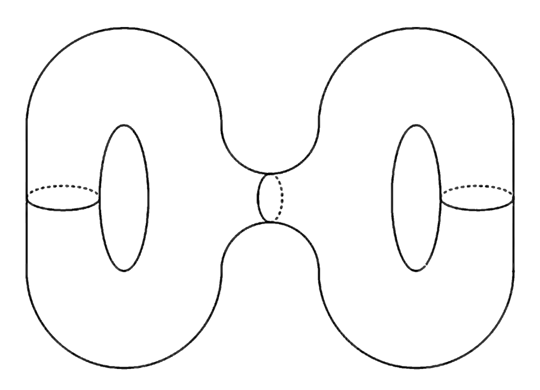
ii) *Les isométries* $\gamma_1, \sigma_1, \cdots, \gamma_g, \sigma_g$ *engendrent un sous-groupe discret* Γ_g *de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *qui agit librement et proprement sur* $\mathbb{H}$ *et ayant* Δ_g *comme domaine fondamental. Le groupe* Γ_g *a pour présentation :*

$$\Gamma_g = \left\langle \gamma_1, \sigma_1, \cdots, \gamma_g, \sigma_g \;\middle|\; \gamma_1\sigma_1{\gamma_1}^{-1}{\sigma_1}^{-1} \cdots \gamma_g\sigma_g{\gamma_g}^{-1}{\sigma_g}^{-1} = 1 \right\rangle. \tag{X.6}$$

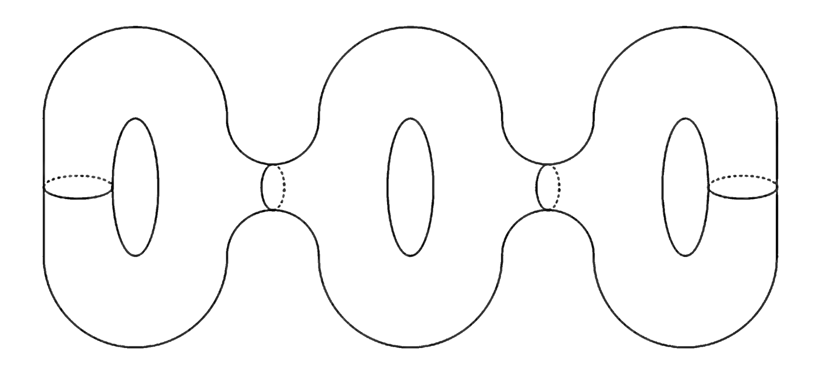
iii) *Le quotient* $M_g = \mathbb{H}/\Gamma_g$ *est une surface hyperbolique compacte orientable ayant exactement* g *pour genre.*



Cet octogone hyperbolique donne la surface ci-dessous pour $g = 2$.



Voici la surface qu'on obtient pour $g = 3$.



Et ainsi de suite pour $g = 4, \cdots$

EXERCICES EN VRAC

Là où il sera considéré, l'espace $\mathbb{R}^3$ sera muni du produit scalaire $\langle x, x'\rangle = x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3$ pour lequel la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée.

Exercice 1

On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'isomorphisme $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \overset{\simeq}{\longmapsto} x + iy = z \in \mathbb{C}$. Soient $\lambda, \alpha \in]0, 1[$ et $a = \lambda e^{2i\pi\alpha}$. On note r la rotation d'angle $2\pi\alpha$ et h l'homothétie complexe $h(z) = az$.

1 - La représentation $\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}^*)$ (groupe des difféomorphismes de $\mathbb{C}^*$) qui envoie le générateur 1 sur la rotation r définit une action Φ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^*$. Pour quelles valeurs de α l'action Φ est-elle fidèle ? libre ? propre ?

2 - La représentation $\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Diff}(\mathbb{C}^*)$ qui envoie cette fois-ci le générateur 1 sur l'homothétie h définit une autre action Ψ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

i) Montrer que l'action Ψ est libre et propre et en donner un domaine fondamental.

ii) Quelle est la surface quotient $M = \mathbb{C}^*/\Psi$?

Exercice 2

Soient M et N deux surfaces différentiables et Γ un groupe dénombrable (discret). On se donne deux actions de Γ : $\Phi : \Gamma \times M \longrightarrow M$ et $\Psi : \Gamma \times N \longrightarrow N$. On rappelle que Φ et Ψ sont dites *conjuguées* s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in M$ on ait : $h(\Phi(\gamma, x)) = \Psi(\gamma, h(x))$. Au niveau des représentations $\rho : \Gamma \longrightarrow \text{Diff}(M)$ et $\sigma : \Gamma \longrightarrow \text{Diff}(N)$, ceci signifie que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$\sigma(\gamma) = h \circ \rho(\gamma) \circ h^{-1}.$$

1 - On suppose que les actions Φ et Ψ sont libres et propres et conjuguées par un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$. Montrer que h induit un difféomorphisme $\overline{h}$ entre les surfaces M/Φ et N/Ψ (obtenues en prenant les quotients de M et N respectivement par les actions Φ et Ψ).

2 - On définit une action Φ du groupe cyclique $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ sur la sphère unité (de $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne usuelle) $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$ par :

$$\Phi(\gamma, x) = \begin{cases} x & \text{si } \gamma = \overline{0} \\ -x & \text{si } \gamma = \overline{1} \end{cases}$$

Montrer que cette action est libre et que la surface quotient $\mathbb{S}^2/\Phi$ est difféomorphe au plan projectif $P^2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit M l'ensemble des points (x, y, z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la relation $x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$.

1 - Montrer qu'une représentation paramétrique régulière $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ de M est donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(u + v) \\ x_2 = \frac{1}{2}(u - v) \\ x_3 = uv \end{cases}$$

et en déduire ainsi que M est une surface différentiable.

2 - Donner la métrique riemannienne sur M induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3 - La surface M est-elle compacte ?

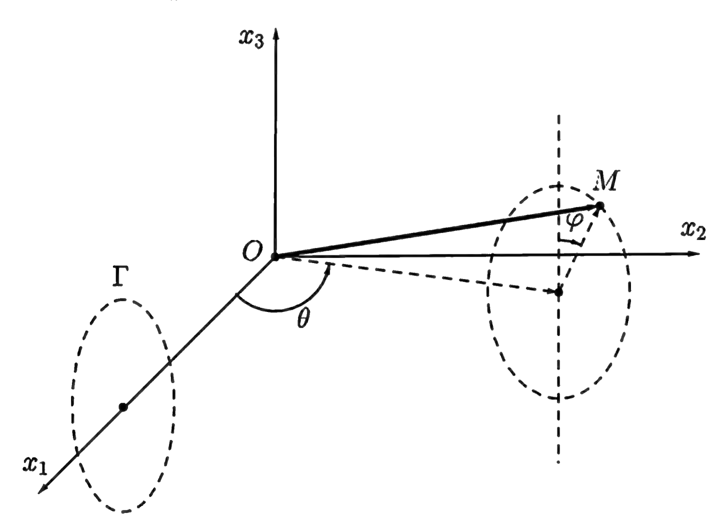
Exercice 4

Soit M une partie de $\mathbb{R}^3$. On appelle *arc* dans M une application continue $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$. Les points $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$ sont respectivement l'*origine* et l'*extrémité* de σ. On dira que M est *connexe par arcs* si, pour tous points a et b de M, il existe un arc σ dans M ayant a pour origine et b pour extrémité.

Montrer que la sphère : $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ est connexe par arcs en donnant explicitement, et en illustrant par un dessin, un arc joignant deux points donnés de $\mathbb{S}^2$.

Exercice 5

Soient r et R deux nombres réels tels que $R > r > 0$. Dans le plan $\{x_2 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, on note Γ le cercle de centre $(R, 0, 0)$ et de rayon r. On fait tourner ce plan autour de la droite vectorielle (Ox_3). Le cercle Γ engendre alors un tore T.



1 - Montrer que, sur le complémentaire U d'un cercle méridien et d'un cercle parallèlle (qu'on donnera de façon précise), T admet comme représentation paramétrique régulière, l'application : $\Psi : (\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\longmapsto (x_1, x_2, x_3) \in U$ donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = (R + r\sin\varphi)\cos\theta \\ x_2 = (R + r\sin\varphi)\sin\theta \\ x_3 = r\cos\varphi \end{cases}$$

2 - Donner la métrique riemannienne g sur U induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3 - Calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (U, g).

Exercice 6

Soient a et c deux nombres réels tels que $0 < a < c$. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on note Γ le cercle défini par les équations $x_3 = 0$ et $x_1^2 + x_2^2 = c^2$. Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par l'axe

(Ox_3) ; il coupe le cercle Γ en deux points diamétralement opposés F et F'. On considère tous les points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient la relation $|MF - MF'| = 2a$. On note S l'ensemble des points M construits de cette façon pour toutes les positions possibles du plan $\mathcal{P}$.

1 - Montrer que l'ensemble S est invariant par toutes les rotations d'axe (Ox_3).

2 - Soit Γ l'intersection de S avec le plan d'équation $x_3 = 0$. Montrer, en exhibant une paramétrisation adéquate au voisinage de chacun de ses points, que γ est une courbe régulière.

3 - Montrer, en exhibant une paramétrisation adéquate au voisinage de chacun de ses points, que S est une surface régulière.

4 - Donner l'expression de la métrique riemannienne induite par celle de $\mathbb{R}^3$ sur S.

5 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intersection de S avec le plan d'équation $x_3 = \lambda$ est une courbe régulière (vecteur tangent partout non nul) fermée simple.

Exercice 7

On note M l'image de l'ouvert $U = \mathbb{R}\times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^2$ par l'application $\Phi : U \longmapsto \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} x_1(u,v) = e^{-v}\cos u \\ x_2(u,v) = e^{-v}\sin u \\ x_3(u,v) = v. \end{cases}$$

1 - Montrer que M est une surface de $\mathbb{R}^3$.

2 - Donner la métrique riemannienne g sur M induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

3 - Calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (M, g).

4 - Donner, en chaque point $p \in M$, des équations cartésiennes de la normale à M.

5 - Montrer que M est difféomorphe à $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Exercice 8

On pose $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 x_3^2 = 1\}$, $N = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^4 + x_3^6 = 1\}$ et on munit ces ensembles de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3$.

1 - Dire pourquoi M et N sont des surfaces.

2 - Les surfaces M et N sont-elles compactes ?

Exercice 9

Soient F le point $(0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{H}$ le plan d'équation $x_3 = -1$. On pose :

$$M = \{p \in \mathbb{R}^3 : \text{distance de } p \text{ à } F = \text{distance de } p \text{ à } \mathcal{H}\}.$$

1 - Montrer que M est définie par une équation du type $x_3 = f(x_1, x_2)$ dont on donnera l'expression exacte.

2 - Montrer que M est une surface de $\mathbb{R}^3$. En donner une paramétrisation globale.

3 - Donner la métrique riemannienne g sur M induite par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

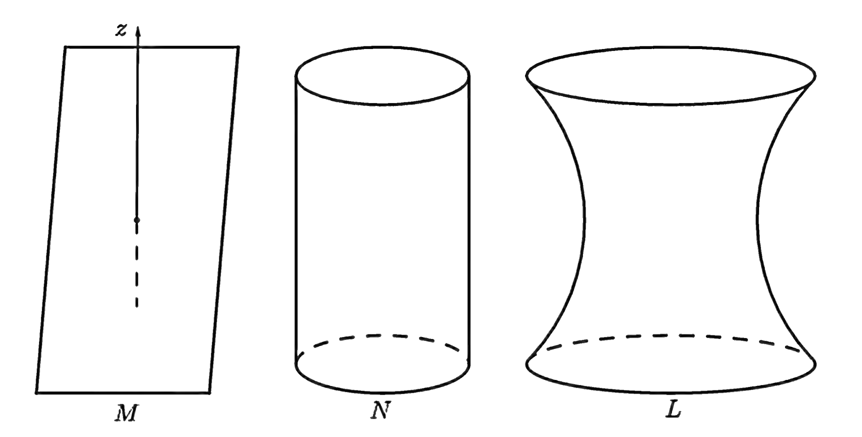
Exercice 10

On considère les surfaces M, N et L de l'espace $\mathbb{R}^3$ données comme suit :

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \text{ et } x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$$

$$N = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$



1- Montrer que les trois surfaces M, N et L sont deux à deux difféomorphes en exhibant de façon explicite des difféomorphismes (il suffit de faire cela entre M et N et puis entre N et L).

2 - Donner la métrique riemannienne h induite par $\mathbb{R}^3$ sur N et calculer la courbure sectionnelle de la surface riemannienne (N, h).

Exercice 11

On munit le demi-plan $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de la métrique riemannienne hyperbolique $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Soient a un réel strictement positif différent de 1 et $\gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ le difféomorphisme donné par $\gamma(z) = az$. On définit une action Ψ de $\Gamma = \mathbb{Z}$ à l'aide de la représentation ρ de $\mathbb{Z}$ dans Diff($\mathbb{H}$) (groupe des difféomorphimses de $\mathbb{H}$) qui envoie 1 sur γ.

1 - Montrer que l'action Ψ est libre et propre. Dessiner l'orbite du point $z_0 = 1 + i$.

2 - Donner un domaine fondamental de Ψ.

3 - Montrer que la surface quotient $M = \mathbb{H}/\Psi$ est difféomorphe au cylindre ouvert $\mathcal{C} = \Gamma \times]0, \pi[$ où Γ est un cercle.

4 - Quelle métrique riemannienne h faut-il mettre sur $\mathcal{C}$ pour que les deux surfaces riemanniennes (M, g) et $(\mathcal{C}, h)$ soient isométriques ?

Exercice 12

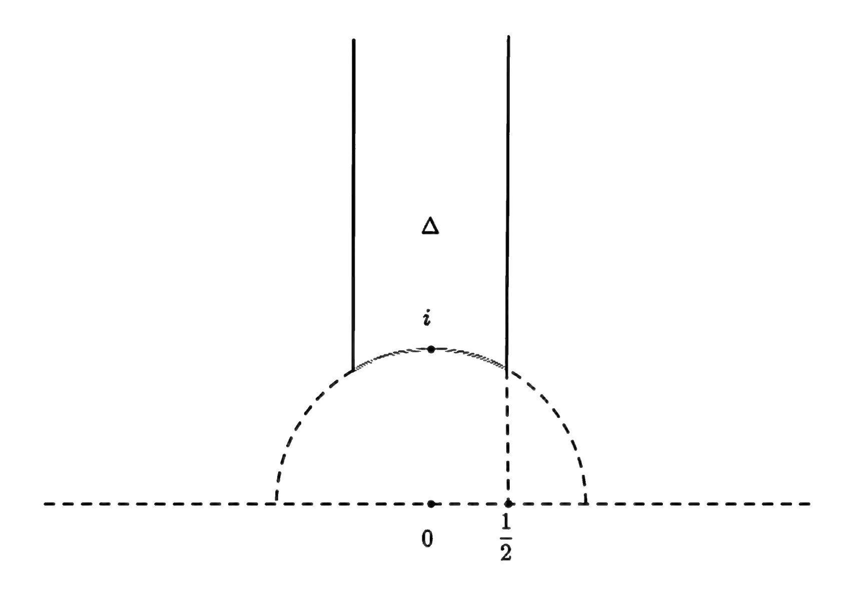
On munit le demi-plan $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ de la métrique riemannienne hyperbolique $g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} = -4\frac{dz \otimes d\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}$. Le groupe SL$(2, \mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 2 et de déterminant 1 agit sur $\mathbb{H}$ par la représentation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\rho}{\longmapsto} \left\{z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}\right\}$. Cette action est par isométries.

On note SL$(2, \mathbb{Z})$ le sous-groupe de SL$(2, \mathbb{R})$ dont les éléments sont les matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On admet que SL$(2, \mathbb{Z})$ est discret dans SL$(2, \mathbb{R})$.

Soit Γ l'image de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ par le morphisme $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}, g)$. On admet que Γ agit proprement sur $\mathbb{H}$, que $\Delta = \{z = x + iy \in \mathbb{H} : |x| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |z| \geq 1\}$ (voir le dessin ci-dessous) en est un domaine fondamental et qu'il est engendré par les isométries $S(z) = -\frac{1}{z}$ et $T(z) = z + 1$.

1 - Montrer que l'action de Γ sur $\mathbb{H}$ n'est pas libre. (Voir le stabilisateur du point i.)

2 - Dessiner le quotient $\mathcal{O} = \mathbb{H}/\Gamma$. À quelle surface connue est-il homéomorphe ?



Exercice 13

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ on considère les points $A = (1, 0)$, $B = (-1, 0)$, $C = (0, 2)$ et $D = (0, -2)$. On pose $S_1 = \mathbb{R}^2 \backslash \{A, B\}$ et $S_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \{C, D\}$; S_1 et S_2 sont deux surfaces régulières.

Montrer que S_1 et S_2 sont difféomorphes (exhiber un difféomorphisme $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$, le plus simple possible).

Exercice 14

On note S la surface $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Soient $\lambda \in]0, 1[$ et $\Phi : \Gamma \times S \longrightarrow S$ l'action différentiable de $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ définie par $\Phi((k, \ell), (x, t)) = (x + k, \lambda^\ell t)$.

Montrer que Φ est libre et propre. Qu'est-ce que la surface $\Sigma = S/\Gamma$?

COMPLÉMENT 3

GROUPE FONDAMENTAL ET REVÊTEMENTS

Dans toute la suite de ce chapitre, le mot « espace » désignera un « espace topologique ». Et sauf mention expresse, tous les espaces que nous considérons dans ce complément sont connexes par arcs, localement connexes par arcs (tout point a un système de voisinages connexes par arcs), séparés et souvent localement compacts. Pour tout espace X, son application identité $x \in X \longmapsto x \in X$ sera noté 1_X.

Nous ne démontrons pas grand chose, nous nous contentons d'exposer les princiales notions en topologie et leurs propriétés qui nous ont servi dans ce texte. Le lecteur désireux de plus de détails et de preuves peut consulter par exemple les références [Go] ou [Ha].

1. Homotopie

C'est une notion plus faible que l'homéomorphie mais elle est aussi importante pour l'étude de la topologie algébrique des espaces. Nous en avons déjà un peu parlé pour les ouverts de $\mathbb{C}$, nous la reprenons ici dans un cadre plus général.

1.1. Définition. *Soient X et Y deux espaces et $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ deux applications continues. On dira que f_0 et f_1 sont* **homotopes,** *s'il existe une application continue $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que $F(x,0) = f_0(x)$ et $F(x,1) = f_1(x)$ pour tout $x \in X$. Soit A une partie de X ; on dira que f_0 et f_1 sont* **homotopes relativement** *à A s'il existe une homotopie F entre f_0 et f_1 telle que, pour $s \in [0,1]$ et tout $a \in A$, on ait $F(x,s) = f_0(a) = f_1(a)$.*

L'homotopie est aussi une connexité par arcs. En effet, notons $C(X,Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y qu'on munit de la *topologie compacte ouverte*, c'est-à-dire la topologie engendrée par la famille des parties de la forme :

$$\mathcal{O}(K,U) = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subset U\}$$

où K est un compact de X et U un ouvert de Y. Alors les applications $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont homotopes si, et seulement si, elles sont dans la même composante connexe par arcs de l'espace $C(X,Y)$. On vérifie facilement les assertions qui suivent.

– Toute application f est homotope à elle-même : prendre $F(x,s) = f(x)$ comme homotopie.

– f_0 homotope à f_1 via $F(x,s)$ implique que f_1 est homotope à f_0 via l'application $G(x,s) = F(x, 1-s)$.

– Si f_0 est homotope à f_1 via F_1 et f_1 homotope à f_2 via F_2 alors f_0 est homotope à f_2 via l'application

$$G(x,s) = \begin{cases} F_1(x,2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ F_2(x,2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

L'homotopie est donc une relation d'équivalence dans l'espace topologique $C(X,Y)$. On a en plus la propriété suivante :

– Soient $X \xrightarrow{f_0} Y \xrightarrow{g_0} Z$ et $X \xrightarrow{f_1} Y \xrightarrow{g_1} Z$ deux suites d'applications continues telles que f_0 soit homotope à f_1 et g_0 homotope à g_1. Alors $g_0 \circ f_0$ est homotope à $g_1 \circ f_1$. En

effet, soient F une homotopie de f_0 à f_1 et G une homotopie de g_0 à g_1 ; alors l'application continue :

$$H : (x, s) \in X \times I \longmapsto G(F(x, s), s) \in Z$$

est une homotopie de $g_0 \circ f_0$ à $g_1 \circ f_1$.

1.2. Définition. *On dira que les espaces X et Y ont même* **type d'homotopie** *s'il existe des applications continues $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes respectivement à 1_X et 1_Y.*

Il est évident que si X et Y sont homéomorphes, ils ont même type d'homotopie : si l'application $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme, prendre $g = f^{-1}$. La réciproque est fausse (on en verra des exemples).

Soient X un espace, A un sous-espace et $j : A \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle ; une *rétraction* de X sur A est une application continue $r : X \longrightarrow A$ dont la restriction à A est 1_A ; si en plus $j \circ r$ est homotope à 1_X, on dira que r est une *rétraction par déformation* de X sur A (ou que X se rétracte par déformation sur A). Dans ce cas, X et A ont même type d'homotopie : l'étude de X du point de vue de l'homotopie est ainsi ramenée à celle de A qui est en général plus petit et souvent plus simple. On dira que X est *contractile* s'il se rétracte par déformation sur l'un de ses points : c'est un espace qui n'est « homotopiquement rien du tout ».

1.3. Exemples

(1) - Soient X un espace (quelconque) et Y un espace normé ; deux applications continues $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ sont toujours homotopes : $F(x, s) = (1 - s)f_0(x) + sf_1(x)$ est une homotopie de f_0 à f_1.

(2) - Si Y est contractile, f_0 et f_1 dans $C(X, Y)$ sont toujours homotopes (laissé en exercice au lecteur).

(3) - Une partie A d'un espace normé Y est dite *étoilée* par rapport au point $a \in A$ si, pour tout $b \in A$, le segment d'extrémités a et b est contenu dans A. Une partie convexe est étoilée par rapport à n'importe quel point $a \in A$. Toute partie étoilée est contractile ; toute partie homéomorphe à une partie étoilée est contractile.

(4) - L'espace $\mathbb{R}^n$ est contractile. Par contre $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (pour $n \geq 2$) ne l'est pas mais il se rétracte par déformation sur sa sphère unité :

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$$

via l'application $r(x) = \frac{x}{||x||}$, l'homotopie entre r et l'identité de $\mathbb{R}^n$ est donnée par $H(x, s) = (1 - s)x + sr(x)$.

2. Groupe fondamental

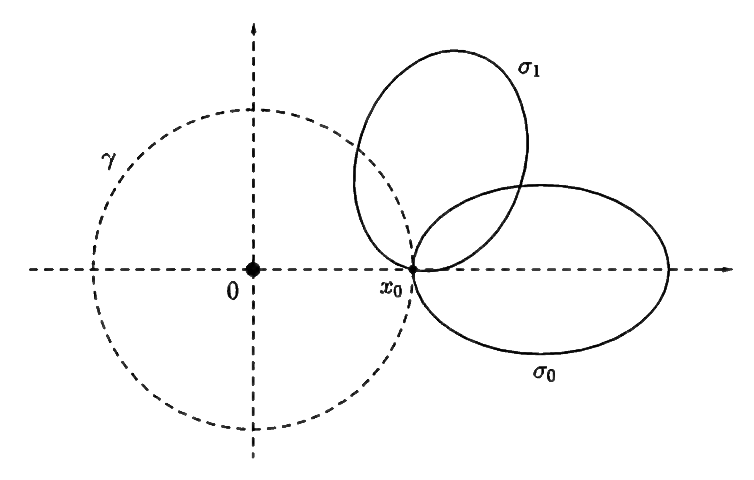
Nous introduisons sommairement cette notion. C'est un ingrédient important et dont on a déjà fait usage (implicitement) dans la deuxième partie de cet ouvrage.

Soit X un espace topologique séparé. On rappelle qu'un *chemin* d'origine x_0 et d'extrémité x_1 est une application continue $\sigma : [0, 1] \longrightarrow X$ telle que $\sigma(0) = x_0$ et $\sigma(1) = x_1$. L'espace X est dit *connexe par arcs* si, pour tous $x_0, x_1 \in X$, il existe un chemin dans X reliant x_0 à x_1. Si $x_0 = x_1$ on dira que σ est un *lacet* de base x_0. Fixons un point $x_0 \in X$. On reprend la définition 1.1. mais spécifiquement pour les lacets.

2.1. Définition. *Deux lacets σ_0 et σ_1 de base x_0 sont* **homotopes** *s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ telle : que*

$$\begin{cases} H(t,0) = \sigma_0(t) \\ H(t,1) = \sigma_1(t) \\ H(0,s) = H(1,s) = x_0 \end{cases}$$

Cela signifie que le lacet σ_0 peut être déformé de manière continue tout en restant dans l'espace X, accroché au point x_0 et être amené sur le lacet σ_1. Par exemple, si X est le plan complexe privé de l'origine et si on choisit $x_0 = 1$ comme point base, on voit que tous les lacets basés en x_0 n'ayant pas l'origine comme point intérieur sont homotopes. Mais le cercle trigonométrique γ (qui est bien sûr un lacet de base x_0) n'est homotope à aucun de ces lacets : l'origine est à l'intérieur et ne peut passer à l'extérieur par déformation continue que si l'on coupe le cercle ; ce qui n'est pas permis.



La relation « être homotope à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\Omega(X, x_0)$ (vérification laissée au lecteur). On note $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble quotient et on montre qu'on peut le munir d'une structure de groupe ; c'est l'objet de ce qui va suivre.

2.2. Composition des lacets

Soient σ_0 et σ_1 deux lacets dans X de base x_0. On définit un nouveau lacet basé en x_0 et noté $\sigma_0 \cdot \sigma_1$ en posant :

$$(\sigma_0 \cdot \sigma_1)(t) = \begin{cases} \sigma_0(2t) & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma_1(2t-1) & \text{pour } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Le lacet $\sigma_0 \cdot \sigma_1$ est obtenu en partant du point x_0, en décrivant le lacet σ_0 (pour t croissant), en revenant à x_0 et en décrivant ensuite σ_1 (toujours dans le sens t croissant) pour revenir encore une fois à x_0.

L'ensemble $\Omega(X, x_0)$ des lacets basés en x_0 est ainsi muni d'une loi de composition interne. Cette loi vérifie un certain nombre de propriétés.

- Supposons que σ_0 est homotope à σ'_0 par une homotopie H_0 et que σ_1 homotope à σ'_1 par une homotopie H_1. Posons :

$$H(t,s) = \begin{cases} H_0(2t, s) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_1(2t-1, s) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Alors H est une homotopie entre $\sigma_0 \cdot \sigma_1$ et $\sigma'_0 \cdot \sigma'_1$. La composition des lacets passe donc à l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ des classes d'homotopie de lacets et le munit d'une loi de composition interne.

- Soient $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in \Omega(X, x_0)$ tels que $\sigma_0(1) = \sigma_1(0)$ et $\sigma_1(1) = \sigma_2(0)$. On a :

$$(\sigma_0 \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_2(t) = \begin{cases} \sigma_0(4t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \sigma_1(4t-1) & \text{pour } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_2(2t-1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

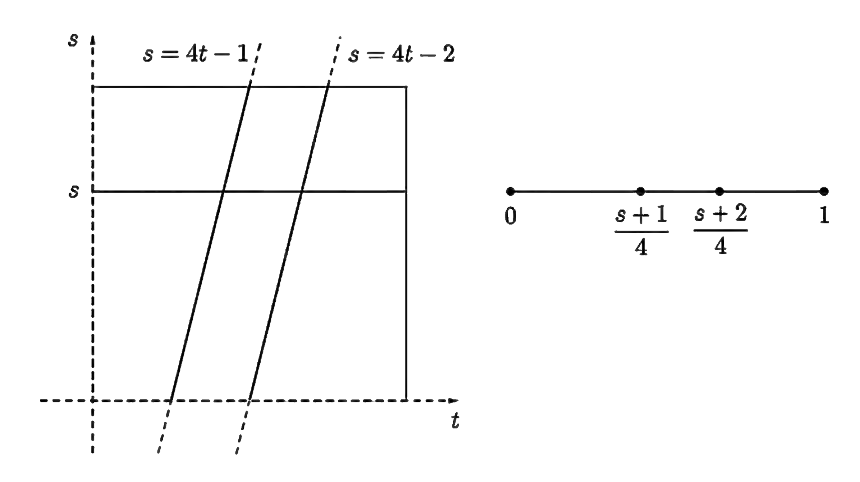
et :

$$\sigma_0 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2)(t) = \begin{cases} \sigma_0(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_1(4t-2) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \sigma_2(4t-3) & \text{pour } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ce sont deux manières de composer les trois lacets σ_0, σ_1 et σ_2. On va montrer qu'à homotopie près, les lacets obtenus sont les mêmes. Soit $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ l'application définie par :

$$H(t,s) = \begin{cases} \sigma_0\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \sigma_1(4t-s-1) & \text{pour } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \sigma_2\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{pour } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Pour comprendre cette écriture, il suffit de bien regarder le dessin ci-dessus : le segment de droite donne l'explication des paramétrages à s fixé.



L'application H est une homotopie entre les lacets $(\sigma_0 \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_2$ et $\sigma_0 \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2)$; ce qui montre que la loi de composition est bien associative sur l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$.

- Notons e le *lacet constant* qui, à tout $t \in [0,1]$, associe le point base x_0. Soit $\sigma \in \Omega(X, x_0)$. On peut vérifier que l'application :

$$H(t,s) = \begin{cases} x_0 & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ \sigma\left(\frac{2t+s-1}{s+1}\right) & \text{pour } \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie entre les lacets $e \cdot \sigma$ et σ. Ceci signifie que la classe d'homotopie $[e]$ du lacet constant e est élément neutre à gauche dans $\pi_1(X, x_0)$. De la même manière, on démontre qu'il est aussi élément neutre à droite.

- Soit $\sigma \in \Omega(X, x_0)$. On définit $\sigma^{-1} \in \Omega(X, x_0)$ par $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t)$ *i.e.* le lacet σ est décrit dans le sens inverse. Alors le lacet $\sigma \cdot \sigma^{-1}$ est donné par :

$$\sigma \cdot \sigma^{-1}(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2(1-t)) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

On définit $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ par :

$$H(t,s) = \begin{cases} \sigma(2t(1-s)) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2(1-t)(1-s)) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Une vérification simple montre que H est une homotopie entre le lacet $\sigma \cdot \sigma^{-1}$ et le lacet constant e. Ainsi, dans $\pi_1(X, x_0)$, la classe $[\sigma^{-1}]$ du lacet σ^{-1} est l'inverse à droite de la classe $[\sigma]$ du lacet σ. On montre que $[\sigma^{-1}]$ est aussi un inverse à gauche de $[\sigma]$.

L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ muni de cette loi de composition induite par celle des lacets est donc un groupe.

Soit x_1 un autre point base. Comme X est connexe par arcs, il existe un chemin α d'origine x_0 et d'extrémité x_1. L'application $\Phi : \sigma \in \Omega(X, x_0) \longmapsto \alpha \cdot \sigma \cdot \alpha^{-1} \in \Omega(X, x_1)$ est compatible avec la relation d'homotopie et induit un isomorphisme Φ_* entre les groupes $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$.

2.3. Définition. *On appelle* **groupe fondamental** *de l'espace X et on note $\pi_1(X)$ l'un quelconque des groupes $\pi_1(X, *)$. On dit que X est* **simplement connexe** *si $\pi_1(X) = 0$.*

Soient X et Y deux espaces connexes par arcs et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On a une application $f_* : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(Y, y_0)$ (où $y_0 = f(x_0)$) définie par $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$. Elle vérifie

- $(id_X)_* = id_{\Omega(X)}$

- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ où $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont des applications continues. Ces propriétés sont en plus compatibles avec la relation d'homotopie des lacets. On a donc un morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$.

- Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ homotopes induisent des morphismes égaux $f_*, g_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$.

- Si X et Y ont le même type d'homotopie, alors ils ont des groupes fondamentaux isomorphes. En particulier, si Y est un rétract par déformation de X on a $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$.

- Si f est un homéomorphisme, f_* est un isomorphisme. Pour cette raison on dira que $\pi_1(X)$ est un *invariant topologique* de X. Plus même, d'après ce qui précède : c'est un invariant du type d'homotopie.

Si M est une surface paracompacte, $\pi_1(M)$ est un groupe dénombrable.

3. Revêtemets

Soient X et Y deux espaces séparés, localement compacts et connexes par arcs. (Un espace est dit *localement compact* si tout point admet un voisinage compact.)

3.1. Définition. *On dira qu'une application continue $p : X \longrightarrow Y$ est un revêtement si tout point $y \in Y$ admet un voisinage ouvert U tel que $p^{-1}(U)$ soit une réunion disjointe d'ouverts $(V_i)_{i \in I}$ de X et, pour tout $i \in I$, la restriction de p à V_i soit un homéomorphisme sur U.*

On dira que p est la *projection* du revêtement et, souvent, c'est l'espace X lui-même qui est dit *revêtement* de Y, ce dernier en est la *base*. L'ouvert U est appelé *voisinage distingué* de y et $F_y = p^{-1}(y)$ la *fibre* en y du revêtement ; c'est un sous-espace discret de X qui peut être fini ou infini. Toutes les fibres F_y ont même cardinal.

3.2. Exemples

On regarde le cecle $\mathbb{S}^1$ comme l'ensemble des nombres complexes de module 1.

i) Soit $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ l'application définie par $p(\theta) = e^{2i\pi\theta}$. Soient $x \in \mathbb{S}^1$ et U un arc de cercle ouvert centré en y de longueur $4\pi\varepsilon$ avec ε assez petit. Soit $\theta \in [0, 1[$ tel que $p(\theta) = y$. Alors $p^{-1}(U) = \coprod_{k\in\mathbb{Z}}]k+\theta-\varepsilon, k+\theta+\varepsilon[$ et la restriction de $p :]k+\theta-\varepsilon, k+\theta+\varepsilon[\longrightarrow U$ est un homéomorphisme. La fibre F_y est constituée par tous les points θ_k de $\mathbb{R}$, transformés de θ par une translation entière.

ii) L'exemple qui précède se généralise au cas où $Y = \mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$ (tore à n dimensions), $X = \mathbb{R}^n$ en posant $p(\theta_1, \ldots \theta_n) = (e^{2i\pi\theta_1}, \ldots, e^{2i\pi\theta_n})$.

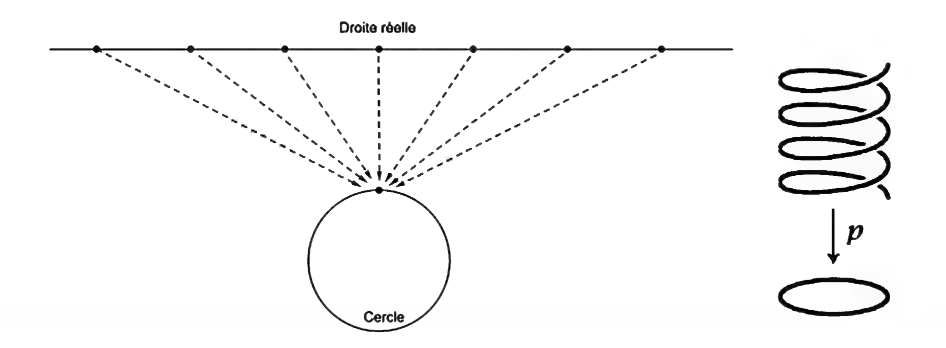
iii) On pose $X = Y = \mathbb{S}^1$ et $p(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors p est un revêtement. La fibre F_y en $y \in \mathbb{S}^1$ est constituée de n points uniformément distribués sur le cercle. On dira que p est un revêtement à n *feuillets* de $\mathbb{S}^1$: le cercle $\mathbb{S}^1$, base de p, est « reproduit n fois » ; dans l'exemple i) il est « reproduit une infinité dénombrable de fois ».

iv) Soient M et N deux surfaces différentiables connexes (et donc connexes par arcs) et $p : M \longrightarrow N$ une application différentiable surjective. On rappelle que p est de rang maximum au point $x \in M$ si l'application tangente $dp_y : T_xM \longrightarrow T_yN$ (où $y = p(x)$) est surjective (donc un isomorphisme). Alors d'après le théorème des fonctions implicites : *si p est de rang maximum en tout point $x \in M$, p est un revêtement.*

On a le théorème suivant dont on peut trouver la démonstration (dans un cadre plus général) dans n'importe quel ouvrage de topologie algébrique ou différentielle.

3.3. Théorème. *Soit M une surface différentiable connexe. Alors il existe une surface différentiable $\widetilde{M}$ connexe et simplement connexe et une action libre, propre et totalement discontinue de $\Gamma = \pi_1(M)$ telle que $M = \widetilde{M}/\Gamma$ et la projection canonique $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ soit un revêtement différentiable. Si M est une courbe complexe, $\widetilde{M}$ l'est aussi et p est holomorphe. Si $p' : \widetilde{M}' \longrightarrow M$ est un autre tel revêtement, il existe un difféomorphisme $f : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}'$ (biholomorphe si M est une courbe complexe) tel que $p = p' \circ f$.*

On dira que $\widetilde{M} \xrightarrow{p} M$ est le *revêtement universel* de M. Les *propriétés géométriques locales* de M et $\widetilde{M}$ sont les mêmes.



Sur le dessin ci-dessus, on a représenté le revêtement universel du cercle sous deux formes différentes : la droite réelle en tant qu'espace euclidien et l'hélice comme courbe de $\mathbb{R}^3$ *se projetant sur le cercle qu'elle revêt.*

Le théorème qui suit est important pour ce qu'on va faire dans la section suivante. On peut trouver sa démonstration dans [Go] par exemple.

3.4. Théorème. *Soient* $p : X \longrightarrow Y$ *un revêtement,* y_0 *un point de* Y, $\sigma : [0,1] \longrightarrow Y$ *un lacet basé en* y_0 *et* $x_0 \in p^{-1}(y_0)$. *Alors :*

i) *Il existe un unique chemin* $\widetilde{\sigma} : [0,1] \longrightarrow X$ *tel que* $\widetilde{\sigma}(0) = x_0$ *et* $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$. *On dira que* $\widetilde{\sigma}$ *est un* **relèvement** *à* X *de* σ.

ii) *Si* σ *et* σ' *sont deux chemins homotopes dans* Y *basés en* y_0, *leurs relèvements* $\widetilde{\sigma}$ *et* $\widetilde{\sigma}'$ *à* X *sont homotopes et tels que* $\widetilde{\sigma}(1) = \widetilde{\sigma}'(1)$.

4. Groupe fondamental d'un espace d'orbites

Un *automorphisme* du revêtement $p : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme $X \xrightarrow{f} X$ tel que $p \circ f = p$. Ces automorphismes forment un groupe $\mathrm{Aut}(p)$ (contenu dans le groupe $\mathrm{Homéo}(X)$ des homéomorphismes de X).

Soit $f \in \mathrm{Aut}(p)$; alors pour tout $y \in Y$, f préserve $p^{-1}(y)$; $\mathrm{Aut}(p)$ induit donc une action sur toute fibre $p^{-1}(y)$. Lorsque cette action est *transitive* (*i.e.* $p^{-1}(y)$ est la seule orbite), on dira que le revêtement est *galoisien*.

Soient $x \in X$ et $y = p(x)$; p induit un homomorphisme $p_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$. On peut montrer qu'en fait p_* est injectif. Les sous-groupes $p_*(\pi_1(X,x))$ et $p_*(\pi_1(X,x'))$ de $\pi_1(Y,y)$ correspondant à deux points base $x, x' \in p^{-1}(y)$ sont conjugués. Le revêtement p est galoisien si, et seulement si, pour tout $x \in p^{-1}(y)$, le sous-groupe $p_*(\pi_1(X,x))$ est distingué (ou normal) dans $\pi_1(Y,y)$.

Soient maintenant X un espace séparé connexe par arcs et Γ un groupe discret agissant librement et proprement sur X. On sait alors que l'espace des orbites Y, muni de la topologie quotient, est un espace séparé connexe par arcs et que la projection canonique $p : X \longrightarrow Y$ est un revêtement. Il est facile de voir que le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ contient Γ ; comme ce dernier agit transitivement sur chaque fibre (car les fibres de p sont exactement les orbites de l'action), c'est a fortiori le cas pour $\mathrm{Aut}(p)$, donc le revêtement p est galoisien.

4.1. Théorème. *Soit* Y *un espace localement simplement connexe. Alors :*

i) *Il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes* Γ *du groupe fondamental* $\pi_1(Y)$ *de* Y *et les revêtements* $X \xrightarrow{p} Y$;

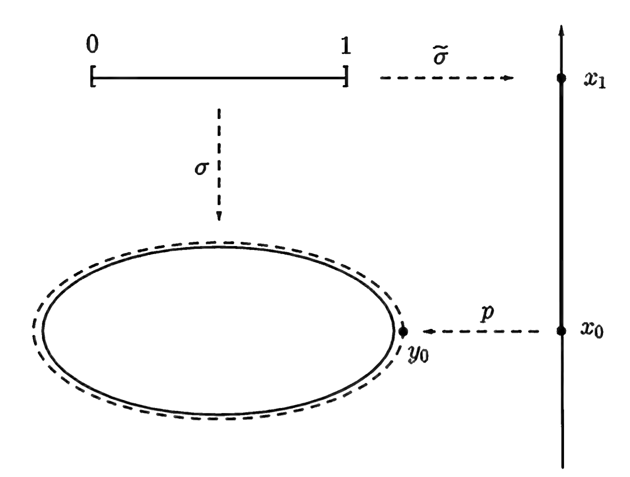
ii) *Il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes distingués* Γ *de* $\pi_1(Y)$ *et les revêtements galoisiens* $p : X \longrightarrow Y$;

iii) *Le revêtement* $p : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ *correspondant à* $\Gamma = \pi_1(X)$ *est simplement connexe. Il est défini à homéomorphisme près et c'est le* **revêtement universel** *de* Y.

Soient x_0 un point de X, y_0 sa projection $p(x_0)$ et σ un lacet dans Y basé en y_0 *i.e.* $\sigma : [0,1] \longrightarrow Y$ est une application continue telle que $\sigma(0) = \sigma(1) = y_0$. D'après le théorème 3.4, il existe une application continue $\widetilde{\sigma} : [0,1] \longrightarrow X$ telle que :

i) $\widetilde{\sigma}(0) = x_0$ et $p \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$;

ii) si σ' est un autre lacet dans Y basé en y_0 homotope à σ, son relèvement $\widetilde{\sigma}'$ à X d'origine x_0 est tel que $\widetilde{\sigma}'(1) = \widetilde{\sigma}(1) = x_1$.



Ceci montre que l'extrémité de $\widetilde{\sigma}(1)$ ne dépend que de sa classe d'homotopie. Comme $p(\widetilde{\sigma}(1)) = p(x_0) = y_0$, x et $\sigma(1)$ sont sur la même orbite de l'action de Γ et donc il existe un unique $\gamma_\sigma \in \Gamma$ tel que $\widetilde{\sigma}(1) = \gamma_\sigma \cdot x_0$. On a donc obtenu une application :

$$\phi : [\sigma] \in \pi_1(Y, y_0) \longmapsto \gamma_\sigma \in \Gamma.$$

4.2. Lemme. *L'application $\phi : [\sigma] \in \pi_1(Y, y_0) \longmapsto \gamma_\sigma \in \Gamma$ est un homomorphisme de groupes.*

Preuve. Soient $[\sigma]$ et $[\sigma']$ deux éléments de $\pi_1(Y, y_0)$. Alors le composé $\sigma \cdot \sigma'$ a un relèvement unique d'origine x_0 qu'on notera $\widetilde{\sigma \cdot \sigma'}$. On a $\widetilde{\sigma \cdot \sigma'} = \widetilde{\sigma} \cdot \theta_z(\sigma')$ où $\theta_z(\sigma')$ est l'unique relèvement de σ' d'origine $z = \widetilde{\sigma}(1)$. Puisque $\gamma_\sigma \cdot \widetilde{\sigma}'$ est le relèvement de σ' d'origine $\gamma_\sigma \cdot x_0$ et que $z = \widetilde{\sigma}(1) = \gamma_\sigma \cdot x_0$, on a $\theta_z(\sigma') = \gamma_\sigma \cdot \widetilde{\sigma}'$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma \cdot \sigma'}(1) =& \gamma_\sigma \cdot (\widetilde{\sigma}'(1)) \\ =& \gamma_\sigma \cdot (\gamma_{\sigma'} \cdot x_0) \\ =& (\gamma_\sigma \gamma_{\sigma'}) \cdot x_0.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\phi([\sigma][\sigma']) = \phi([\sigma])\phi([\sigma'])$ *i.e.* ϕ est un homomorphisme de groupes. □

4.3. Lemme. *L'homomorphisme $\phi : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \Gamma$ est surjectif.*

Preuve. Soient $\gamma \in \Gamma$ et τ un chemin dans X d'origine x_0 et d'extrémité $\gamma \cdot x_0$. Ce chemin se projette sur Y en un lacet σ basé en y et détermine donc un élément $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$. Par définition $\phi([\sigma]) \cdot x_0 = \widetilde{\sigma}(1)$ où $\widetilde{\sigma}$ est l'unique relevé de σ à X d'origine x_0. On a donc nécessairement $\phi([\sigma]) = \gamma$, qui montre bien que le morphisme ϕ est surjectif. □

4.4. Lemme. *Le noyau de $\phi : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \Gamma$ est l'image $p_*(\pi_1(X, x_0))$ du groupe $\pi_1(X, x_0)$ par l'homomorphisme $p_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ induit par $p : X \longrightarrow Y$.*

Preuve. Le noyau de ϕ est exactement l'ensemble des éléments $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$ tels que $\widetilde{\sigma}(1) = x_0$ *i.e.* $\widetilde{\sigma}$ est un lacet dans X basé en x_0. Ce sont donc les éléments $[\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$ de la forme $[p \circ \widetilde{\sigma}]$ avec $[\widetilde{\sigma}] \in \pi_1(X, x_0)$, c'est-à-dire $p_*(\pi_1(X, x_0))$. □

4.5. Théorème. *L'homomorphisme $\phi : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \Gamma$ induit un isomorphisme $\overline{\phi}$ du groupe quotient $G = \pi_1(Y, y_0)/p_*(\pi_1(X, x_0))$ sur Γ. En particulier, si X est simplement connexe on a $\pi_1(Y, y_0) = \Gamma$.*

5. Quelques exemples

Comment calculer le groupe fondamental d'un espace X donné ? Bien que la réponse à la question dépend de la complexité topologique de X, il existe tout de même des outils de calcul. Nous en exposons quelques-uns, parmi ceux qui n'ont, en gros, comme exemples d'application que les espaces que nous avons considérés dans ce texte. Nous ne donnons aucune démonstration, nous signalons simplement les références des ouvrages où on peut en trouver.

Le matériel en théorie des groupes que nous utilisons ici se trouve dans le paragraphe 6 du Complément 4.

5.1. Produit d'espaces

Soient X_1 et X_2 deux espaces. Alors le groupe fondamental du produit cartésien $X_1 \times X_2$ est le produit direct des groupes fondamentaux $\pi_1(X_1)$ et $\pi_1(X_2)$. De manière générale, si $X_1, \cdots, X_n$ sont n espaces, on a :

$$\pi_1(X_1 \times \cdots \times X_n) = \pi_1(X_1) \times \cdots \times \pi_1(X_n).$$

Un exemple concret : on prend $X_1 = \cdots = X_n = \mathbb{S}^1$ où $\mathbb{S}^1$ est le cerle unité dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. (Chacun des espaces X_i (avec $i = 1, \cdots, n$) peut aussi se voir comme n'importe quelle courbe fermée simple.) Alors le produit $X_1 \times \cdots \times X_n$ n'est rien d'autre que le tore $\mathbb{T}^n$. On a donc :

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) = \overbrace{\pi_1(\mathbb{S}^1) \times \cdots \times \pi_1(\mathbb{S}^1)}^{n \text{ copies}} = \overbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}^{n \text{ copies}} = \mathbb{Z}^n.$$

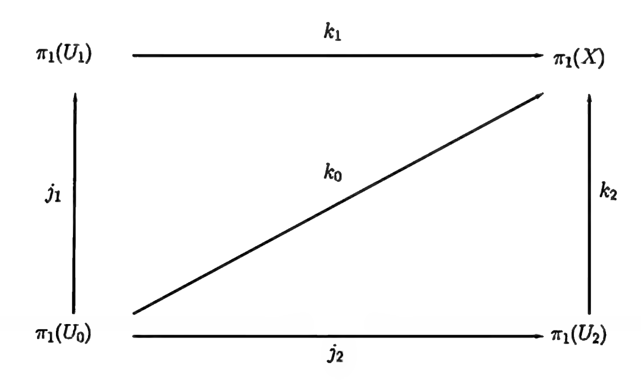
Le fait que $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ découle du théorème 4.5. appliqué à la situation : $X = \mathbb{R}$ est un espace simplement connexe sur lequel le groupe discret $\Gamma = \mathbb{Z}$ agit librement et proprement par l'intermédiare de la translation $\gamma : x \in \mathbb{R} \longmapsto x + 1 \in \mathbb{R}$ avec comme quotient $Y = X/\Gamma \simeq \mathbb{S}^1$.

5.2. Le théorème de Van Kampen

Il permet le calcul du groupe fondamental d'un espace X à partir de ceux de morceaux le constituant. Soit $\{U_1, U_2\}$ un recouvrement de X par deux ouverts connexes par arcs U_1 et U_2 et dont l'intersection $U_0 = U_1 \cap U_2$ est non vide et est aussi connexe par arcs.

Soient x_0 un point de U_0 et $j_1 : \pi_1(U_0, x_0) \longrightarrow \pi_1(U_1, x_0)$ et $j_2 : \pi_1(U_0, x_0) \longrightarrow \pi_1(U_2, x_0)$ les morphismes induits respectivement par les inclusions $U_0 \hookrightarrow U_1$ et $U_0 \hookrightarrow U_2$. Alors $\pi_1(X, x_0)$ est la somme amalgamée de $\pi_1(U_1, x_0)$ et $\pi_1(U_2, x_0)$ au-dessus de $\pi_1(U_0, x_0)$.

Notons k_0, k_1 et k_2 les morphismes induits respectivement par les inclusions $U_0 \hookrightarrow X$, $U_1 \hookrightarrow X$ et $U_2 \hookrightarrow X$. Le diagramme qui suit est alors commutatif.



On note G_0 le sous-groupe de $\pi_1(X)$ image de $\pi_1(U_0)$ par le morphisme k_0. Le théorème de Van Kampen dit que $\pi_1(X)$ est la somme amalgamée des groupes $\pi_1(U_1)$ et $\pi_1(U_2)$ au-dessus de G_0. Les exemples qui suivent montrent comment se fait le calcul de façon concrète.

1. π_1 de la sphère

On rappelle que la sphère $\mathbb{S}^2$ est l'ensemble des vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ dont la norme euclidienne vaut 1. On pose $U_1 = \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\}$ et $U_2 = \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,-1)\}$. On a vu dans le chapitre VII (page 121) que U_1 et U_2 sont difféomorphes au plan $\mathbb{R}^2$ et donc ils sont simplement connexes. On en déduit que $\pi_1(\mathbb{S}^2) = 0$. (L'intersection $U_0 = U_1 \cap U_2$, dont on n'a pas eu besoin ici, est difféomorphe au plan épointé $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ qui a $\mathbb{Z}$ pour groupe fondamental.)

Un calcul analogue appliqué à la sphère $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$ permet de montrer que son groupe fondamental est aussi trivial.

2. π_1 du plan privé de k points

On note Σ_k le plan $\mathbb{R}^2$ privé de k points $\{z_1, \cdots, z_k\}$. On sait déjà que pour Σ_1 on a $\pi_1(\Sigma_1) \simeq \mathbb{Z}$ engendré par exemple par le cercle de rayon 1 et centré en x_1.

Prenons $k = 2$. Quitte à déplacer les points z_1 et z_2 dans le plan, on peut supposer que $z_1 = (x_1, y_1) = (-1, 0)$ et $z_2 = (x_2, y_2) = (1, 0)$. On pose :

$$U_1 = \left\{z = (x,y) \in \Sigma_2 : x > -\tfrac{1}{2}\right\} \quad \text{et} \quad U_2 = \left\{z = (x,y) \in \Sigma_2 : x < \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Alors U_1 et U_2 sont deux ouverts de l'espace Σ_2 et recouvrant celui-ci ; leur intersection $U_1 \cap U_2$ est la bande $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$; celle-ci est contractile et donc simplement connexe. Par suite $\pi_1(\Sigma_2)$ est le produit libre $\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$, c'est-à-dire le groupe libre à deux générateurs $\langle s_1, s_2 \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

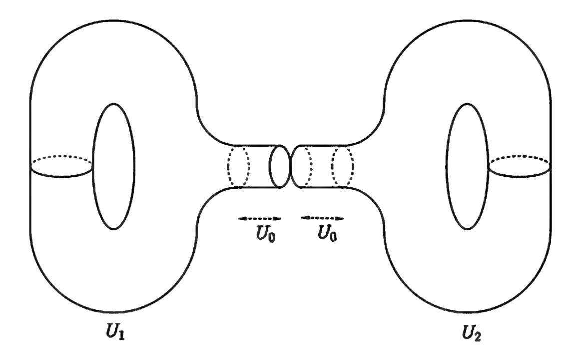
Pour $k \geq 3$, une application répétée du théorème de Van Kampen (le lecteur se débrouillera pour voir comment on peut faire) montre que le groupe fondamental de Σ_k est le groupe libre à k générateurs $\langle s_1, \cdots, s_k \rangle = \overbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}^{k \text{ copies}}$. Ces k générateurs peuvent être représentés par k cercles de rayon $\varepsilon < \frac{1}{2} \min\limits_{p,q} ||z_p - z_q||$ et centrés respectivement en $z_1, \cdots, z_k$.

3. π_1 de la surface M_2

Rappelons que M_g est la surface compacte orientable (de genre $g \geq 2$) obtenue comme le quotient du plan hyperbolique $\mathbb{H}$ par l'action libre et propre du groupe :

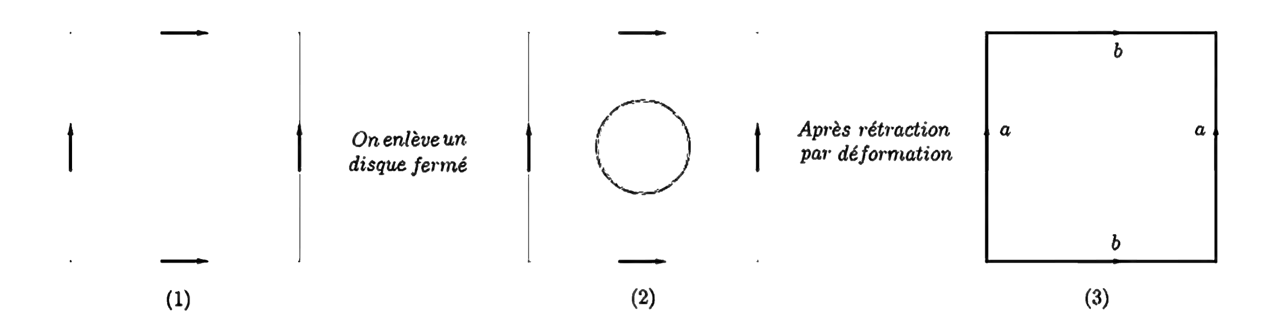
$$\Gamma_g = \left\langle \gamma_1, \sigma_1, \cdots, \gamma_g, \sigma_g \;\middle|\; \gamma_1 \sigma_1 {\gamma_1}^{-1} {\sigma_1}^{-1} \cdots \gamma_g \sigma_g {\gamma_g}^{-1} {\sigma_g}^{-1} = 1 \right\rangle.$$

(Voir le chapitre X Théorème de Poincaré page 156.) Comme l'espace $\mathbb{H}$ est simplement connexe, le groupe fondamental de cette surface est évidemment Γ_g. Mais nous allons le retrouver (pour $g = 2$) à l'aide du théorème de Van Kampen. C'est aussi un bon exemple pour voir « géométriquement » comment on peut construire une somme amalgamée de deux groupes au-dessus d'un groupe non trivial. À cet effet, on recouvre M_2 par les deux ouverts U_1 et U_2 comme ci-dessous.

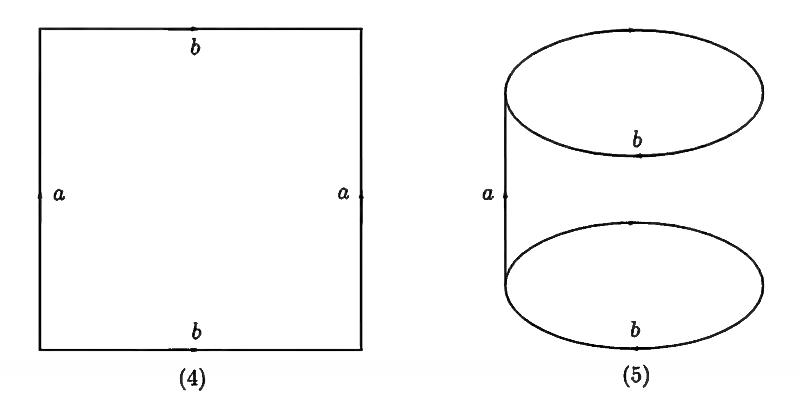


Comme on le voit sur le dessin ci-dessus, l'intersection $U_0 = U_1 \cap U_2$ est une surface homéomorphe au cylindre $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$; celui-ci a le type d'homotopie du cercle et donc $\pi_1(U_0) = \mathbb{Z}$. Quand à U_1 et U_2, ils sont difféomorphes à la surface obtenue en privant un tore d'un petit disque fermé. Décrivons leur type d'homotopie en nous aidant du dessin ci-dessous.

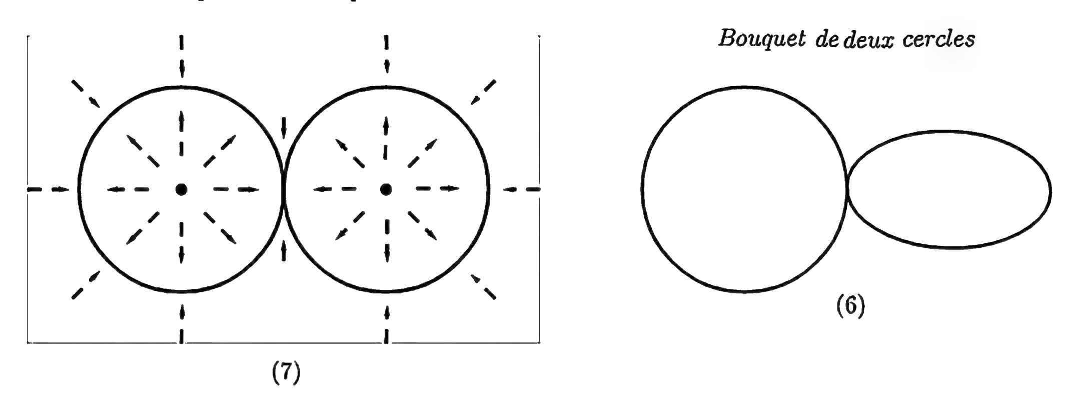
On voit le tore $\mathbb{T}^2$ comme un carré dont on a identifié les côtés opposés (figure (1)). On y ôte un petit disque fermé ; on obtient un carré troué (figure (2)). Celui-ci se rétracte par déformation sur son contour extérieur (figure (3)).



On identifie les côtés a de ce contour (figure (4)) : ils se rcollent l'un sur l'autre et ne forment plus que le segment a vertical (figure (5)). Quant aux côtés b, ils donnent chacun un cercle horizontal b (figure (5)).



Après identification des cercles b (et donc aussi celle des extrémités du segment a), on obtient un bouquet de deux cercles (figure (6)). Mais ce bouquet n'est rien d'autre en fait que l'espace obtenu en rétractant par déformation le plan privé de deux points sur les deux cercles de la figure (7).



(7) (6)

Ainsi, chacun des ouverts U_1 et U_2 a le type d'homotopie de l'espace Σ_2 (le plan privé de deux points). Et comme on l'a vu, $\pi_1(U_1)$ et $\pi_1(U_2)$ sont tous les deux isomorphes au groupe libre à deux génrateurs a et b :

$$\pi_1(U_1) \simeq \langle a_1, b_1 \rangle \quad \text{et} \quad \pi_1(U_2) \simeq \langle a_2, b_2 \rangle.$$

Dans les ouverts U_1 et U_2 les cercles du bord (ceux des petits disques qu'on a ôtés) sont respectivement représentés par les commutateurs $c_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ et $c_2 = a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$. Tous les deux représentent aussi le générateur d de $\pi_1(U_0)$.

D'après le théorème de Van Kampen, $\pi_1(M_2)$ est la somme amalgamée des deux groupes $\pi_1(U_1)$ et $\pi_1(U_2)$ au-dessus de $\pi_1(U_0)$ où les morphismes $j_1 : \pi_1(U_0) \longrightarrow \pi_1(U_1)$ et $j_2 : \pi_1(U_0) \longrightarrow \pi_1(U_2)$ sont donnés sur le générateur d de $\pi_1(U_0)$ par $j_1(d) = c_1$ et $j_2(d) = c_2$.

En recollant U_1 et U_2 pour reconstituer la surface M_2, les deux commutateurs c_1 et c_2 doivent donc être égaux à d. D'où $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$. En posant $\gamma_1 = a_1$, $\sigma_1 = b_1$, $\gamma_2 = b_2$ et $\sigma_2 = a_2$, le groupe fondamental de M_2 est alors :

$$\pi_1(M_2) = \Gamma_2 = \left\langle \gamma_1, \sigma_1, \gamma_2, \sigma_2 \;\middle|\; \gamma_1 \sigma_1 \gamma_1{}^{-1} \sigma_1{}^{-1} \gamma_2 \sigma_2 \gamma_2{}^{-1} \sigma_2{}^{-1} = 1 \right\rangle.$$

COMPLÉMENT 4

NOTIONS UTILES EN THÉORIE DES GROUPES

Ce complément rassemble des réponses sommaires à quelques-unes des questions que m'ont posées des étudiants sur ceci ou cela en théorie des groupes. Il pourrait être utile dans la lecture de certains passages des deux parties principales.

1. La notion de section

1.1. En général

Soient X et B deux ensembles (non vides bien sûr) et $\pi : X \longrightarrow B$ une application surjective. Pour tout $b \in B$: $X_b = \pi^{-1}(b) = \{x \in X : \pi(x) = b\}$ est une partie non vide de X appelée *fibre* de π au-dessus de b. Si $b \neq b'$, les deux fibres X_b et $X_{b'}$ sont disjointes. La famille $\{X_b\}_{b\in B}$ est donc une partition de X.

Dans chaque fibre X_b, on peut choisir un et un seul élément $\sigma(b)$. Ceci est évident si l'ensemble B est fini ; c'est aussi clair si B est dénombrable. Pour B non dénombrable, l'axiome du choix nous permet de faire cela. On définit ainsi une application :

(1) $$\sigma : b \in B \longmapsto \sigma(b) \in X \quad \text{avec} \quad \sigma(b) \in X_b.$$

On a donc $\pi \circ \sigma$ =identité de B. Une vérification immédiate montre que σ est injective. On dira que σ est une *section* de π. Elle permet de « remonter » l'ensemble B dans X et l'y plonger de telle sorte que la restriction de π à $\Sigma = \sigma(B)$ soit une bijection sur B.

Du point de vue ensembliste, une surjection $\pi : X \longrightarrow B$ admet donc toujours une section $\sigma : B \longrightarrow X$. Si X et B ont une structure supplémentaire et que π préserve cette structure, il est alors souhaitable que σ la préserve aussi. Par exemple :

- Si X et B sont des espaces topologiques et π continue, on aimerait que σ soit continue.
- Si X et B sont des groupes et π un morphisme, on aimerait que σ soit un morphisme.
- Si X et B sont des espaces vectoriels et π linéaire, on aimerait que σ soit linéaire.

1.2. Exemples

Il n'est malheureusement pas toujours possible d'avoir de telles sections ; nous allons voir cela sur quelques exemples : un sur lequel ça marche et deux autres sur lesquels ça ne marche pas.

– Supposons que X et B soient des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et π linéaire. Alors π admet toujours une section linéaire $\sigma : B \longrightarrow X$. En effet, soit $\{b_i\}_{i\in I}$ une base de B ; pour chaque $i \in I$, soit x_i un vecteur de X tel que $\pi(x_i) = b_i$. Comme n'importe quel vecteur b de B s'écrit $b = \lambda_{i_1} b_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} b_{i_n}$ (avec $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_n} \in \mathbb{K}$), on définit $\sigma(b)$ en posant :

(2) $$\sigma(b) = \lambda_{i_1} x_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_n} x_{i_n}.$$

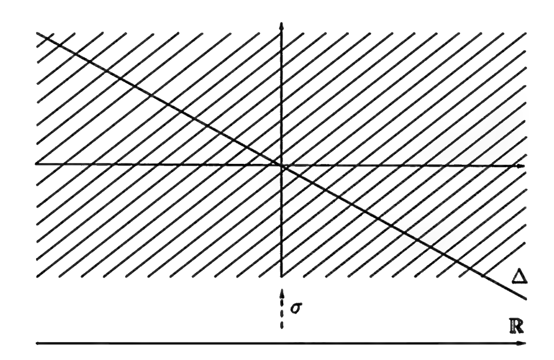
L'application $\sigma : B \longrightarrow X$ ainsi définie est bien une section linéaire de π. Si X et B sont en plus normés et π est continue, alors une section linéaire continue $\sigma : B \longrightarrow X$ n'existe

pas toujours si la dimension de B est infinie (la construction d'un exemple à cet effet est un peu plus laborieuse). Mais si $\dim(B) < +\infty$, une telle section existe toujours. Regardons l'exemple simple qui suit.

– Supposons $X = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{R}$ (chacun de ces espaces est muni de l'une de ses normes usuelles) et π définie par $\pi(x,y) = x - y$ (π est linéaire continue). Alors les fibres X_b de π sont les droites affines $x - y = c$ avec c une constante (variant dans $\mathbb{R}$). Toute application linéaire :

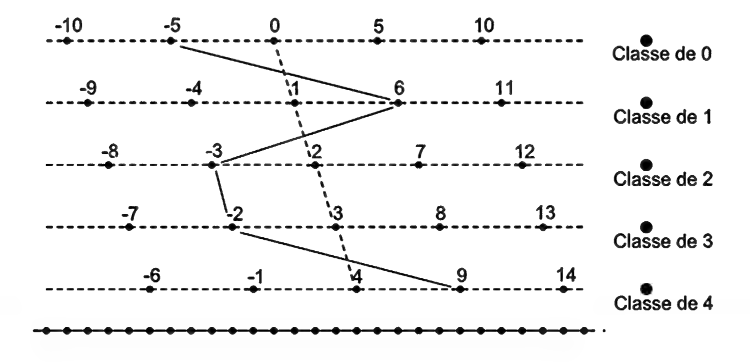
$$\sigma_\mu : x \in \mathbb{R} \longmapsto (x, \mu x) \in \mathbb{R}^2 \tag{3}$$

où μ est un réel tel que $\mu \neq 1$, est alors une section linéaire continue de π.



Les droites parallèles sont les fibres de l'application linéaire π. La droite Δ est l'image de la section $\sigma_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Elle coupe chacune des fibres en un et un seul point : elle les « sectionne », d'où son appellation.

– Supposons $X = \mathbb{Z}$; soit H le sous-groupe $n\mathbb{Z}$ des multiples de n où n est un entier strictement supérieur à 1. Alors H est un sous-groupe distingué de $X = \mathbb{Z}$ et le quotient $B = X/H$ n'est rien d'autre que le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des classes modulo n de $\mathbb{Z}$. La projection canonique $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme surjectif de groupes. L'application π admet des sections au sens ensembliste (*cf.* dessin qui suit pour $n = 5$) mais aucune d'elles ne saurait être un morphisme de groupes. En effet, si $\sigma : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un « homomorphisme section » de π, l'image de $\overline{1}$ est un entier non nul k de $\mathbb{Z}$; comme $\overbrace{\overline{1} + \cdots + \overline{1}}^{n \text{ fois}} = \overline{n} = \overline{0}$, l'entier $\overbrace{k + \cdots + k}^{n \text{ fois}} = nk$ doit être nul, ce qui est absurde !



2. Extensions de groupes

On se donne deux groupes quelconques H et Γ. *Peut-on en construire d'autres à partir de ces deux-là ?* La réponse est oui et nous allons donner un procédé de construction. Pour éviter des confusions éventuelles, on note $+$ la loi sur H, 0 sera l'élément neutre de H et 1 celui de Γ.

2.1. Définition. *On appelle* **extension** *de Γ par H (ou de H par Γ) toute suite exacte courte de groupes et de morphismes :*

$$0 \longrightarrow H \stackrel{j}{\longrightarrow} G \stackrel{\pi}{\longrightarrow} \Gamma \longrightarrow 1. \tag{4}$$

Cela signifie que j est injectif, π est surjectif et le noyau de π est égal à l'image de j.

Bien sûr le groupe G est plus gros que H puisqu'il le contient mais aussi plus gros que Γ puisqu'il se surjecte dessus. (Dans la littérature mathématique, on parle souvent d'extension de Γ par H même si c'est plutôt H qu'on étend !)

2.2. Produit direct ou extension triviale

On pose $G = H \times \Gamma$; sur cet ensemble on définit la loi de composition interne :

$$(h, \gamma) \cdot (h', \gamma') = (h + h', \gamma\gamma'). \tag{5}$$

Il est facile de voir qu'on obtient ainsi un groupe dans lequel l'élément neutre est $(0, 1)$ et l'inverse de (h, γ) est $(-h, \gamma^{-1})$. Tout élément de la forme $(h, 1)$ commute avec tout élément de la forme $(0, \gamma)$. On dira que $G = H \times \Gamma$ est le *produit direct* des deux groupes H et Γ.

On définit les morphismes $j : H \longrightarrow G$ et $\pi : G \longrightarrow \Gamma$ par $j(h) = (h, 1)$ et $\pi(h, \gamma) = \gamma$. On vérifie imméditement que la suite :

$$0 \longrightarrow H \stackrel{j}{\longrightarrow} G \stackrel{\pi}{\longrightarrow} \Gamma \longrightarrow 1$$

est exacte. On dira que G est une *extension triviale* de Γ par H.

2.3. Produit semi-direct

On rappelle qu'un *automorphisme* de H n'est rien d'autre qu'un isomorphisme de groupes $H \longrightarrow H$. L'ensemble des automorphismes de H muni de la composition des applications est un groupe qu'on note $\mathrm{Aut}(H)$.

Une *représentation* de Γ dans H est un morphisme de groupes $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$. Il permet de définir une action du groupe Γ sur H :

$$(\gamma, h) \in \Gamma \times H \longmapsto \rho(\gamma)(h) \in H.$$

Ainsi, un élément quelconque γ de Γ est vu, à l'aide de ρ, comme un automorphisme de H. Pour simplifier, et quand il n'y a pas de confusion sur la représentation ρ, l'élément $\rho(\gamma)(h)$ (transformé de h par l'automorphisme $\rho(\gamma)$) sera noté $\gamma \cdot h$. On munit $H \times \Gamma$ de la loi de composition interne :

$$(h', \gamma') \cdot (h, \gamma) = (\gamma' \cdot h + h', \gamma'\gamma). \tag{6}$$

qui fait de $H \times \Gamma$ un groupe. Son élément neutre est $(0,1)$ et l'inverse de (h,γ) est $(-(\gamma^{-1} \cdot h), \gamma^{-1})$. Le groupe G ainsi construit s'appelle produit *semi-direct* de H par Γ relativement à ρ et se note $H \rtimes_\rho \Gamma$. Il est évident que si ρ est le morphisme trivial, c'est-à-dire si $\rho(\gamma) =$ identité de H pour tout $\gamma \in \Gamma$, $H \rtimes_\rho \Gamma$ est le produit direct $H \times \Gamma$.

Là aussi on définit les morphismes $j : H \longrightarrow G$ et $\pi : G \longrightarrow \Gamma$ par $j(h) = (h,1)$ et $\pi(h,\gamma) = \gamma$ et on vérifie immméditement que la suite :

(7) $$0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} H \rtimes_\rho \Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$$

est exacte. On a donc une extension de Γ par H. Mais c'est une extension qui possède une propriété en plus : le morphisme π admet l'application :

$$\sigma : \gamma \in \Gamma \longmapsto (0,\gamma) \in G$$

comme section. On peut dire en quelque sorte que H et l'image de Γ par la section σ sont deux facteurs qui permettent de fabriquer le groupe G. Ceci est illustré par le :

2.4. Théorème. *Soient H et Γ deux sous-groupes d'un groupe G tels que* :

- *H est distingué dans G* ;
- $H \cap \Gamma = \{1\}$;
- *l'application $\phi : (h,\Gamma) \in H \times \Gamma \longmapsto h\gamma \in G$ est bijective.*

Soit ρ le morphisme de Γ dans $\mathrm{Aut}(G)$ qui à γ associe l'automorphisme intérieur φ_γ (i.e. $\varphi_\gamma(g) = \gamma^{-1}g\gamma$). Alors l'application $\phi : (h,\gamma) \in H \rtimes_\rho \Gamma \longmapsto h\gamma \in G$ est un isomorphisme de groupes. On dira que G est le produit semi-direct **interne** *de ses deux sous-groupes H et Γ.*

3. Divers

Une extension $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$ est dite *scindée* si le morphisme π admet une section $\sigma : \Gamma \longrightarrow G$ (bien sûr, σ doit être un morphisme de groupes) ; sinon, on dira qu'elle est *non scindée.*

3.1. Nous avons vu que si G est le produit semi-direct d'un groupe H par un groupe Γ, alors l'extension : $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} H \rtimes_\rho \Gamma \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$ est scindée. Réciproquement, soit $0 \longrightarrow H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1$ une extension scindée par une section $\sigma : \Gamma \longrightarrow G$. Notons $\widetilde{\Gamma}$ le sous-groupe de G image de Γ par σ ($\sigma : \Gamma \longrightarrow \widetilde{\Gamma}$ est un isomorphisme). Alors :

• H est distingué dans G puisque noyau du morphisme π.

• $H \cap \widetilde{\Gamma} = \{e\}$. En effet, soit g un élément de $H \cap \widetilde{\Gamma}$ qui est de la forme $g = \sigma(\gamma)$. Donc $\gamma = \pi(g) = \pi(\sigma(\gamma)) = 1$ puisque $g \in H = \ker(\pi)$; comme σ est un morphisme $g = \sigma(\gamma) = \sigma(1) = e$.

• L'application $\phi : (h,\widetilde{\gamma}) \in H \times \widetilde{\Gamma} \longmapsto h\widetilde{\gamma} \in G$ est une bijection. Montrons qu'elle est injective. À cet effet soient $(h_1,\widetilde{\gamma}_1)$ et $(h_2,\widetilde{\gamma}_2)$ deux éléments de $H \times \widetilde{\Gamma}$ tels que $h_1\widetilde{\gamma}_1 = h_2\widetilde{\gamma}_2$. Alors $\widetilde{\gamma}_1\widetilde{\gamma}_2^{-1} = h_1^{-1}h_2$, ce qui montre que $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ sont équivalents modulo H, donc égaux puisque $\widetilde{\Gamma}$ ne contient qu'un et un seul élément de chaque classe d'équivalence. L'égalité $\widetilde{\gamma}_1 = \widetilde{\gamma}_2$ implique automatiquement $h_1 = h_2$. Montrons maintenant que ϕ est surjective. Soit $g \in G$ et posons $\gamma = \pi(g)$. De façon évidente, g et $\widetilde{\gamma} = \sigma(\gamma)$ sont équivalents modulo H ; il existe donc $h \in H$ tel que $g\widetilde{\gamma}^{-1} = h$, d'où $g = h\widetilde{\gamma} = \phi(h,\widetilde{\gamma})$.

Pour finir, H étant distingué dans G, $\widetilde{\Gamma}$ agit dessus par automorphismes intérieurs (par conjugaison si on préfère). D'après le théorème 2.4. G est le produit semi-direct interne de H et $\widetilde{\Gamma}$.

3.2. Soient G un groupe et A une partie de G. On appelle *centralisateur* de A l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ de tous les éléments de G qui commutent à tout élément de A :

$$\mathcal{C}(A) = \{g \in G : ga = ag \quad \text{pour tout } a \in A\}.$$

On vérifie immédiatement que, si A est symétrique ($a \in A \Longrightarrow a^{-1} \in A$), $\mathcal{C}(A)$ est un sous-groupe de G. Le centralisateur $\mathcal{C}(G)$ de tout le groupe G est appelé *centre* de G ; il y est distingué.

Soit $0 \longrightarrow H \overset{j}{\longrightarrow} G \overset{\pi}{\longrightarrow} \Gamma \longrightarrow 1$ une extension scindée par une section $\sigma : \Gamma \longrightarrow G$. Supposons que σ est à valeurs dans le centralisateur $\mathcal{C}(H)$. Alors l'extension considérée est triviale *i.e.* le groupe G est isomorphe au produit direct $H \times \Gamma$. C'est le cas en particulier d'une *extensions centrale* scindée (*i.e.* pour laquelle $H \subset \mathcal{C}(G)$). (Les vérifications sont laissées au lecteur.)

4. Exemples d'extensions

4.1. Voici une extension dont on a déjà parlé mais cela ne fait pas de mal de la reprendre. On prend $G = \mathbb{Z}$ et $H = n\mathbb{Z}$ le sous-groupe des multiples de n où n est un entier strictement supérieur à 1. Le quotient $\Gamma = G/H$ est le groupe des classes résiduelles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modulo n. Notons $j : H \hookrightarrow G$ l'inclusion et $\pi : G \longrightarrow \Gamma$ la projection canonique. Nous avons alors une suite exacte :

$$0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \overset{\pi}{\longrightarrow} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{8}$$

donc une extension de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $n\mathbb{Z}$. Comme on l'a déjà vu, le morphisme projection π n'a pas de morphisme section et donc l'extension (8) n'est pas scindée. C'est l'exemple le plus simple d'extension non scindée qu'on puisse donner si jamais la question est posée !

4.2. Soit $\mathcal{P}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ (réel ou complexe) de dimension n. On rappelle que la structure affine sur $\mathcal{P}$ est définie par une application $\Phi : (M, N) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longmapsto \overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ telle que :

(i) $\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{MN}$ (relation de Chasles) ;

(ii) pour tout $O \in \mathcal{P}$, l'application partielle $\Phi_O : M \in \mathcal{P} \longmapsto \overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ est une bijection. Tout point M de $\mathcal{P}$ s'écrit ainsi de façon unique $M = O + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$.

L'ensemble des bijections affines de $\mathcal{P}$ forment un groupe appelé *groupe affine* de $\mathcal{P}$ et noté Aff($\mathcal{P}$). Il se surjecte sur le *groupe linéaire* GL($\overrightarrow{\mathcal{V}}$) de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ par le morphisme π qui à toute application affine f associe sa direction $\overrightarrow{f}$. Le noyau de π est le sous-groupe $\mathcal{T}$ des translations de $\mathcal{P}$. Nous avons ainsi une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{T} \overset{j}{\hookrightarrow} \mathrm{Aff}(\mathcal{P}) \overset{\pi}{\longrightarrow} \mathrm{GL}(\overrightarrow{\mathcal{V}}) \longrightarrow 1 \tag{9}$$

donc une extension de GL($\overrightarrow{\mathcal{V}}$) par $\mathcal{T}$. Cette extension est scindée. En effet, si O est un point de $\mathcal{P}$, on peut munir $\mathcal{P}$ d'une structure d'espace vectoriel pour laquelle la bijection $\Phi_O : M \in \mathcal{P} \longmapsto \overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ est un isomorphisme. Ainsi, pour cette structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{P}$, les applications linéaires sont exactement les applications affines qui fixent

le point O. À tout isomorphisme linéaire $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ on associe alors l'isomorphimse affine $f = \sigma(\overrightarrow{f})$ défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\Phi_O} & \overrightarrow{\mathcal{V}} \\ f\downarrow & & \downarrow\overrightarrow{f} \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{\Phi_O} & \overrightarrow{\mathcal{V}} \end{array}$$

Il est facile de vérifier que σ est un homomorphisme de $\mathrm{GL}(\overrightarrow{\mathcal{V}})$ dans $\mathrm{Aff}(\mathcal{P})$ et qu'il vérifie $\pi\circ\sigma =$ identité de $\mathrm{GL}(\overrightarrow{\mathcal{V}})$, c'est-à-dire σ est une section de π. Ce qui montre que l'extension (9) est scindée. (Le scindement qu'on vient de construire dépend bien entendu du choix du point O.)

Lorsque $\mathcal{P}$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique, le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ et la section σ n'est rien d'autre que l'injection $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$; le groupe additif $(\mathbb{R}^n,+)$ est vu comme le sous-groupe des translations. Ainsi :

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}). \qquad (10)$$

Un exemple plus simple à comprendre est le groupe GA des transformations affines préservant l'orientation de la droite réelle $\mathbb{R}$. (Ce sont les transformations de la forme $x \in \mathbb{R} \longmapsto ax+b \in \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$.) Le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ agit (par automorphismes) sur le groupe additif $\mathbb{R}$:

$$(a,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longmapsto at \in \mathbb{R}.$$

Le produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$ associé à cette action n'est alors rien d'autre que le groupe GA qu'on appelle *groupe affine* de la droite réelle.

4.3. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ contiennent de nombreux sous-groupes intéressants et dont pas mal d'entre eux sont des produits semi-directs. Ils s'obtiennent dès qu'on impose aux transformations de préserver une structure géométrique supplémentaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Voici des exemples concrets.

• Munissons $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Il définit une norme $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et une distance $d(x,y) = ||x-y||$ sur l'espace affine $\mathbb{R}^n$. On dira qu'un automorphisme linéaire $\varphi \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est *orthogonal* s'il vérifie :

$$\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle = \langle x,y\rangle \quad \text{pour tous } x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Ces automorphismes forment un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ noté $\mathrm{O}(n)$ et appelé *groupe orthogonal* de $\mathbb{R}^n$; les éléments $\varphi \in \mathrm{O}(n)$ de déterminant 1 en forment un sous-groupe $\mathrm{SO}(n)$ appelé *groupe orthogonal spécial* de $\mathbb{R}^n$. Ces groupes agissent naturellement sur $\mathbb{R}^n$ et donnent lieu à des extensions scindées :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \overset{j}{\hookrightarrow} \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \overset{\pi}{\longrightarrow} \mathrm{O}(n) \longrightarrow 1 \qquad (11)$$

et

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^n \overset{j}{\hookrightarrow} \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n) \overset{\pi}{\longrightarrow} \mathrm{SO}(n) \longrightarrow 1 \qquad (12)$$

où $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$) est le groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^n$ (resp. des isométries affines de $\mathbb{R}^n$ qui préservent l'orientation). Le sous-groupe $\mathrm{SO}(n)$ est le noyau du morphisme dét de $\mathrm{O}(n)$ sur le groupe mltiplicatif $\{1, -1\}$ qui à φ associe son déterminant $\text{dét}(\varphi)$. On a donc une extension :

$$1 \longrightarrow \mathrm{SO}(n) \hookrightarrow \mathrm{O}(n) \overset{\text{dét}}{\longrightarrow} \{1, -1\} \longrightarrow 1. \tag{13}$$

Elle est scindée : une section du morphisme dét est obtenue en envoyant -1 sur n'importe quel automorphisme orthogonal d'ordre 2 (*i.e.* de carré trivial) et qui ne respecte pas l'orientation de $\mathbb{R}^n$, par exemple une réflexion par rapport à un hyperplan vectoriel.

• Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Pour tout entier relatif k on note A^k la puissance $|k|^{\text{ème}}$ de A si $k > 0$, de A^{-1} si $k < 0$; $A^0 = I$ (matrice identité). Supposons que A est à coefficients entiers et de déterminant 1 ; alors son inverse A^{-1} est aussi à coefficients entiers. Si A est d'ordre infini (A^k différente de la matrice identité pour tout $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$), elle engendre une action fidèle de $\Gamma = \mathbb{Z}$ sur $H = \mathbb{Z}^n$:

$$(k, \mathrm{m}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n \longmapsto A^k(\mathrm{m}) \in \mathbb{Z}^n.$$

Cette action permet de construire le produit semi-direct $G = \mathbb{Z}^n \rtimes_A \mathbb{Z}$, donc une extension scindée :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \hookrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Lorsque la matrice A a toutes ses valeurs propres réelles, positives et différentes de 1, ces groupes possèdent des propriétés dynamiques extrêmement riches.

4.4. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque (c'est par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un corps fini). Soit G le groupe de matrices :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{K} \right\}.$$

C'est un groupe non commutatif mais nilpotent (le lecteur peut le vérifier). Son centre $H = \mathcal{C}(G)$ est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{K}, +)$. L'application $\pi : \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \longmapsto (x, y) \in \mathbb{K}^2$ est un homomorphisme surjectif de noyau H. On a donc un isomorphisme $\Gamma = G/H \overset{\simeq}{\longrightarrow} \mathbb{K}^2$ ($\mathbb{K}^2$ est muni de sa structure habituelle de groupe additif) et par suite une extension :

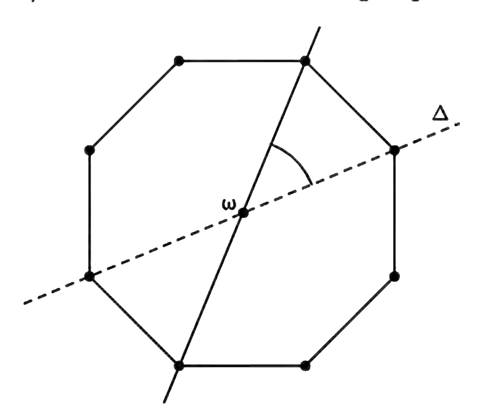
$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{K}^2 \longrightarrow 0.$$

Cette extension est non scindée. En effet, toute section $\sigma : \Gamma \longrightarrow G$ arrive dans le centralisateur de H (puisque H est le centre de G) et donc G sera isomorphe au produit direct $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^2 \simeq \mathbb{K}^3$, ce qui n'est pas le cas puisque G n'est pas commutatif.

4.5. Soit $\mathfrak{P}_n$ un polygone régulier à n côtés (avec $n \geq 3$) dans le plan affine euclidien. Pour $n = 3$, c'est un triangle équilatéral, pour $n = 4$, c'est un carré *etc.* Un tel polygone est toujours inscrit dans un cercle γ dont on notera ω le centre.

Soit Δ la droite passant par ω et l'un des sommets de $\mathfrak{P}_n$ et posons $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$. Un examen de la figure ci-dessous montre immédiatement que la réflexion s d'axe Δ et la rotation ρ de centre ω et d'angle θ_n sont des isométries de $\mathcal{P}$ qui préservent le polygone $\mathfrak{P}_n$. Elles engendrent un groupe noté D_n qu'on appelle *groupe diédral* d'ordre $2n$ (nombre de ses éléments). En fait D_n est le groupe des symétries de $\mathfrak{P}_n$. La rotation ρ engendre un groupe cyclique $C_n = \{1, \rho, \rho^2, \cdots, \rho^{n-1}\}$ d'ordre n (isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), les autres éléments sont $s, s\rho, \cdots, s\rho^{n-1}$. En fait, le groupe D_n est un produit semi-direct $C_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur C_n via la réflexion s.

Quant à $D_1 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, c'est le groupe des symétries d'un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral ; $D_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est celui d'un rectangle qui n'est pas un carré.



5. Groupes résolubles, groupes nilpotents

Soit G un groupe d'élément neutre e. On appelle *commutateur* de $x, y \in G$, l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$; on dira que x et y *commutent* si $xyx^{-1}y^{-1} = e$. Évidemment, dans un groupe abélien, tout commutateur est trivial. Le groupe G n'est pas abélien s'il admet au moins un commutateur non trivial. Ces commutateurs vont permettre de « mesurer » le « degré de non commutativité » du groupe. Pour simplifier $xyx^{-1}y^{-1}$ sera noté $[x, y]$.

On note G_1 ou $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs *i.e.* le plus petit sous-groupe contenant la partie $\{[x, y] : x, y \in G\}$. On vérifie facilement que G_1 est un sous-groupe distingué de G. On pose :

$$G_0 = G \quad \text{et, pour tout } k \geq 1, \quad G_k = [G_{k-1}, G_{k-1}].$$

De façon immédiate, on a $\cdots G_k \subset G_{k-1} \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0 = G$; d'autre part, pour tout $k \geq 1$, G_k est un sous-groupe distingué de G_{k-1}.

5.1. Définition. *On dira que le groupe G est* **résoluble** *s'il existe $k \geq 1$ tel que $G_k = \{e\}$.*

Le plus petit entier k tel que $G_k = \{e\}$ et $G_{k-1} \neq \{e\}$ est appelé *degré de résolubilité* du groupe G. Si $k = 1$, le groupe G est commutatif. Plus l'entier k est petit plus G paraît proche d'un groupe commutatif. Les groupes résolubles forment une classe très importante et sont à la base de la *théorie de Galois* (résolution des équations algébriques par radicaux).

Il existe une catégorie intermédiaire entre les groupes abéliens et les groupes résolubles. Elle joue aussi un rôle important en géométrie et dans pas mal d'autres domaines en algèbre. Posons :

$$G^0 = G \quad \text{et, pour tout } k \geq 1, \quad G^k = [G^{k-1}, G].$$

On vérifie aussi facilement que $\cdots G^k \subset G^{k-1} \subset \cdots \subset G^2 \subset G^1 \subset G^0 = G$ et que, pour tout $k \geq 1$, G^k est un sous-groupe distingué de G^{k-1}.

5.2. Définition. *On dira que le groupe G est* **nilpotent** *s'il existe $k \geq 1$ tel que $G^k = \{e\}$.*

Le plus petit entier k tel que $G^k = \{e\}$ et $G^{k-1} \neq \{e\}$ est appelé *degré de nilpotence* du groupe G. Si $k = 1$, le groupe G est commutatif ; si $k = 2$, on dira que G est *métabélien.*

Comme $G_k \subset G^k$ pour tout k, un groupe nilpotent est forcément résoluble. On a donc la suite d'inclusions entre catégories de groupes :

$$\{\text{groupes abéliens}\} \subset \{\text{groupes nilpotents}\} \subset \{\text{groupes résolubles}\}.$$

Ces inclusions sont évidemment strictes.

5.3. Exemple résoluble non nilpotent

Soit G le groupe des transformations affines préservant l'orientation de la droite réelle $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les applications de la forme :

$$g : x \in \mathbb{R} \longmapsto ax + b \in \mathbb{R}$$

avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Si l'élément $g \in G$ est défini par le couple (b, a) et g' par le couple (b', a') alors gg' est défini par le couple $(a'b + b', a'a)$: facile à voir, il suffit de composer les applications g et g' dans l'ordre $g' \circ g$ (faire attention à cela dans la suite des calculs). L'inverse de g est donné par le couple $\left(-\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$.

• Le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ agit sur le groupe additif par homothéties :

$$(a, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longmapsto at \in \mathbb{R}.$$

Cette action permet de construire le produit semi-direct $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+^*$ dont il est facile de voir que c'est exactement le groupe G.

• Pour montrer que G est résoluble non nilpotent, il suffit de reprendre la preuve donnée pour le groupe affine complexe dans l'exercice 3 page 105.

6. Générateurs et relations

6.1. Le groupe libre

Soit $\mathcal{S} = (s_i)_{i \in I}$ un ensemble non vide qu'on appelle *alphabet.* On se propose de construire le *groupe libre* $F(\mathcal{S})$ dont les *générateurs* sont les éléments de $\mathcal{S}$. On associe à $\mathcal{S}$ un ensemble $\mathcal{S}^{-1} = (s_i^{-1})_{i \in I}$ de telle sorte que l'application $s_i \in X \longmapsto s_i^{-1} \in \mathcal{S}^{-1}$ soit une bijection. On appelle *mot* sur $\mathcal{S}$ toute suite finie $u = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots s_{i_m}^{\varepsilon_m}$ où $\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_m}$ sont des éléments de $\{1, -1\}$. Le nombre m d'éléments de $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}$ qui apparaissent dans l'écriture de u s'appelle *longueur* de u. Un mot est dit *réductible* s'il contient des blocs du type $s_i^{\varepsilon_i} s_i^{-\varepsilon_i}$; *irréductible sinon.* Par exemple :

$$s_i s_i s_j^{-1} s_k s_k s_\ell \text{ est irréductible alors que } s_i s_i s_i^{-1} s_j^{-1} s_k s_k s_\ell \text{ est réductible.}$$

On dira que deux mots u et v sont *équivalents* si l'un s'obtient à partir de l'autre en rajoutant ou en retranchant des blocs du type $x_i^{\varepsilon_i} x_i^{-\varepsilon_i}$. On note $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ l'ensemble des mots sur $\mathcal{S}$ et $F(\mathcal{S})$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Sur $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ on définit une loi de composition interne comme suit. Si $u = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_m}^{\varepsilon_m}$ et $v = s_{j_1}^{\varepsilon'_1} \dots s_{j_n}^{\varepsilon'_n}$ avec $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_m, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n \in \{1, -1\}$, on pose :

$$uv = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_m}^{\varepsilon_m} s_{j_1}^{\varepsilon'_1} \dots s_{j_n}^{\varepsilon'_n}.$$

Cette opération induit sur $F(\mathcal{S})$ une structure de groupe (la vérification est laissée au lecteur). On dira que $F(\mathcal{S})$ est le *groupe libre bâti sur l'alphabet* $\mathcal{S}$ ou *engendré* par $\mathcal{S}$. On dira aussi que $\mathcal{S}$ est un *système de générateurs.*

Si $\mathcal{S}$ est réduit à un seul élément alors $F(\mathcal{S})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

6.2. Présentation d'un groupe

• Soit Γ un groupe engendré par une famille d'éléments $(\gamma_i)_{i \in I}$ indexée par I. L'application $s_i \in \mathcal{S} \longmapsto \gamma_i \in \Gamma$ se prolonge en un homomorphisme de groupes $\varphi : F(\mathcal{S}) \longrightarrow \Gamma$.

Les éléments du noyau $\mathcal{R}$ de φ sont appelés *relations* du groupe Γ ; on dira que $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ est une *présentation* de Γ par *générateurs* (les éléments de $\mathcal{S}$) et *relations* (ce qui définit le noyau $\mathcal{R}$ du morphisme φ). On dit aussi que $\langle \mathcal{S} | \mathcal{R} \rangle$ est le *code génétique* de Γ.

On dira que Γ est de *type fini* ou *finiment engendré* si $\mathcal{S}$ est fini ; il est dit de *présentation finie* s'il est de type fini et a un nombre fini de relations.

Voici des exemples concrets de groupes donnés par leurs générateurs et relations (ou leur code génétique). La plupart d'entre eux sont bien sûr connus.

• $\mathbb{Z} = \langle s \rangle$, $\quad \mathbb{Z}^2 = \langle s_1, s_2 | s_1 s_2 = s_2 s_1 \rangle$, $\quad \mathbb{Z}^n = \langle s_1, \cdots, s_n | s_i s_j = s_j s_i \rangle$

• Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle s | s^n = 1 \rangle$

• Le groupe diédral d'ordre $2n$, $n \geq 2$: $\langle r, s | r^n = 1,\ s^2 = 1 \text{ et } rsrs = 1 \rangle$

• Le groupe modulaire $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$: $\langle s, t | s^2 = 1 \text{ et } (st)^3 = 1 \rangle$. Les générateurs s et t sont représentés respectivement par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

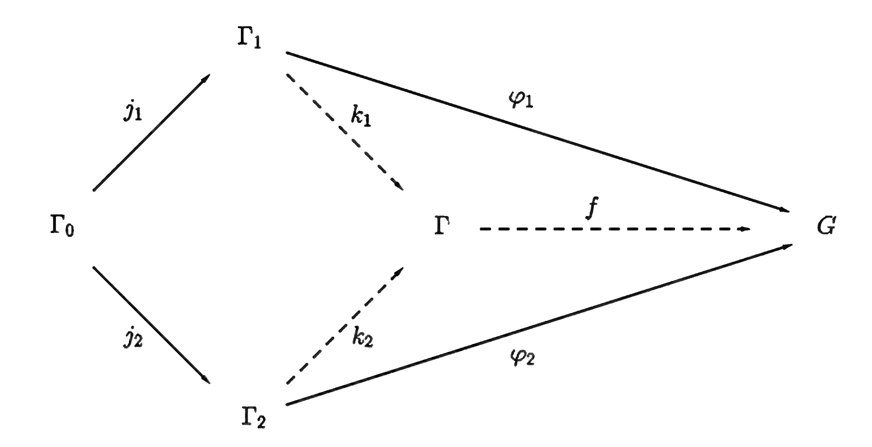
• Le groupe $\Gamma_g = \left\langle \gamma_1, \sigma_1, \cdots, \gamma_g, \sigma_g \;\middle|\; \gamma_1 \sigma_1 {\gamma_1}^{-1} {\sigma_1}^{-1} \cdots \gamma_g \sigma_g {\gamma_g}^{-1} {\sigma_g}^{-1} = 1 \right\rangle$ où g est un entier tel que $g \geq 2$. On a vu comment on peut l'interpréter géométriquement comme le groupe fondamental de la surface (compacte orientable) hyperbolique M_g de genre g.

6.3. Théorème. *Soient Γ_0, Γ_1 et Γ_2 trois groupes et $j_1 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_1$ et $j_2 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_2$ deux morphismes. Alors :*

i) *Il existe un groupe Γ et des morphismes $k_1 : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma$ et $k_2 : \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma$ tels que $k_1 \circ j_1 = k_2 \circ j_2$.*

ii) *Si G est un autre groupe et $\varphi_1 : \Gamma_1 \longrightarrow G$ et $\varphi_2 : \Gamma_2 \longrightarrow G$ des morphismes tels que $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$, il existe un unique morphisme $f : \Gamma \longrightarrow G$ tel que $f \circ k_1 = \varphi_1$ et $f \circ k_2 = \varphi_2$.*

iii) *Tout autre groupe Γ' vérifiant ces mêmes conditions est isomorphe à Γ.*



On dira que le groupe Γ donné par le théorème 6.3. est la *somme amalgamée* de Γ_1 et Γ_2 au-dessus de Γ_0 ; on le note $\Gamma_1 *_{\Gamma_0} \Gamma_2$.

Si j_1 et j_2 sont les morphismes triviaux (c'est le cas en particulier lorsque Γ_0 est réduit à l'élément neutre), la somme amalgamée de Γ_1 et Γ_2 se note $\Gamma_1 * \Gamma_2$ et s'appelle *produit libre* de Γ_1 et Γ_2.

6.4. Comment fabrique-t-on $\Gamma_1 *_{\Gamma_0} \Gamma_2$?

On se donne des morphismes $j_1 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_1$ et $j_2 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_2$ et les présentations respectives des trois groupes Γ_0, Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_0 = \langle \mathcal{S}_0 \mid \mathcal{R}_0 \rangle, \quad \Gamma_1 = \langle \mathcal{S}_1 \mid \mathcal{R}_1 \rangle \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = \langle \mathcal{S}_2 \mid \mathcal{R}_2 \rangle.$$

Alors la somme amalgamée $\Gamma_1 *_{\Gamma_0} \Gamma_2$ est le group Γ ayant pour présentation :

$$\Gamma = \big\langle \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \;\big|\; \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \{ j_1(s_0) = j_2(s_0) : s_0 \in \mathcal{S}_0 \} \big\rangle.$$

6.5. On pourrait penser que la somme amalgamée Γ de deux groupes Γ_1 et Γ_2 au-dessus d'un groupe Γ_0 serait a priori un groupe plus grand. Il n'en est rien, voici un exemple où cette somme est le groupe trivial.

On prend $\Gamma_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\Gamma_2 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\Gamma_0 = \mathbb{Z}$. Les morphismes $j_1 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_1$ et $j_2 : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_2$ seront respectivement les projections canoniques :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Rappelons que $\Gamma_1 = \big\langle s_1 \;\big|\; s_1^2 = e \big\rangle$ et $\Gamma_2 = \big\langle s_2 \;\big|\; s_2^3 = e \big\rangle$ (où e désigne communément l'élément neutre). En appliquant 6.4, on voit que Γ a pour présentation :

$$\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_0} \Gamma_2 = \big\langle s_1, s_2 \;\big|\; s_1^2 = e,\ s_2^3 = e \text{ et } s_1 = s_2 \big\rangle$$

qui montre clairement que ce groupe est réduit à $\{e\}$. □

COMPLÉMENT 5

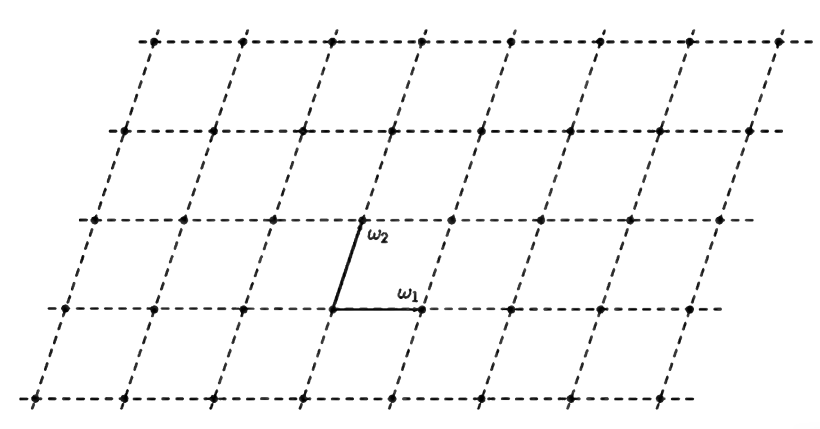
COURBES ELLIPTIQUES

Elles font partie des courbes complexes qui ont été le plus étudiées. On les retrouve dans diverses branches des mathématiques : en algèbre, en analyse, en géométrie algébrique et en géométrie complexe. Mais c'est dans le cadre de cette dernière que nous les regardons dans ce complément. Nous montrons d'abord comment une courbe elliptique est construite géométriquement, ensuite nous donnons sa structure complexe et ce qui régit la variation de celle-ci. Nous introduisons brièvement les *fonctions elliptiques* avec comme exemple fondamental la *fonction de Weierstrass* $\wp$ et nous indiquons comment on l'utilise pour plonger une courbe elliptique dans le plan projectif complexe $P^2(\mathbb{C})$.

1. Réseaux dans $\mathbb{C}$

1.1. Définition. *Un* ***réseau*** *de* $\mathbb{C}$ *est un sous-groupe discret* Γ *du groupe additif* $(\mathbb{C},+)$ *isomorphe à* $\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Soit $\omega_1 \in \Gamma$ tel que $|\omega_1| = \inf\{|\omega| : \omega \in \Gamma\backslash\{0\}\}$. Un tel élément existe puisque Γ est une partie discrète de $\mathbb{C}$. De même, on peut trouver $\omega_2 \in \Gamma$ non nul de module minimal dans $\Gamma\backslash\{0, \omega_1\}$ et tel que le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ne soit pas réel. On peut alors montrer (voir par exemple [Ah] page 265) que Γ coïncide avec le réseau $\{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire, qu'en tant que $\mathbb{Z}$-module, Γ admet le couple (ω_1, ω_2) comme base.



Le parallélogramme Δ du plan formé par les deux vecteurs ω_1 et ω_2 est appelé *domaine fondamental* du réseau Γ. On en distingue 5 types en fonction de leur « forme » (qu'on peut trouver par exemple dans [Ar]) :

a) *Oblique* : $|\omega_1| < |\omega_2| < |\omega_1 - \omega_2| < |\omega_1 + \omega_2|$

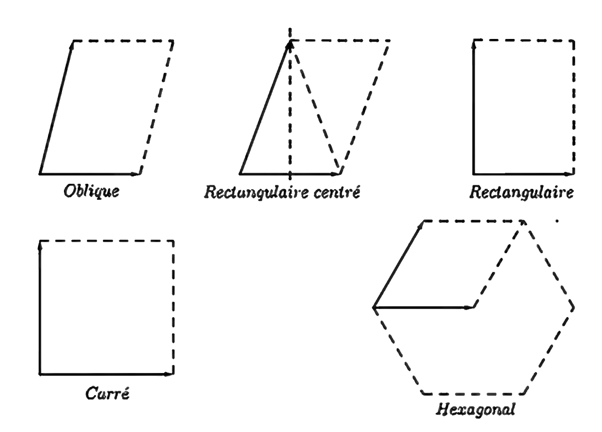
b) *Rectangulaire centré* : $|\omega_1| < |\omega_2| = |\omega_1 - \omega_2| < |\omega_1 + \omega_2|$

c) *Rectangulaire* : $|\omega_1| < |\omega_2| < |\omega_1 - \omega_2| = |\omega_1 + \omega_2|$

d) *Carré* : $|\omega_1| = |\omega_2| < |\omega_1 - \omega_2| = |\omega_1 + \omega_2|$

e) *Hexagonal* : $|\omega_1| = |\omega_2| = |\omega_1 - \omega_2| < |\omega_1 + \omega_2|$

Voici les différents dessins qui leur correspondent. Ils ne nous serviront pas ici, ils apparaissent plutôt dans l'étude des pavages du plan (voir [Ar] à cet effet).



Notons $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant $+1$ ou -1 ; celles de déterminant 1 en constituent le sous-groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ que nous avons déjà introduit dans l'exercice 12 du chapitre X.

1.2. Proposition. *Soient* (ω_1,ω_2) *et* (ω_1',ω_2') *deux bases de* Γ. *Alors il existe une matrice* $A\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ *telle que* $\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$.

Démonstration. Comme $\omega_1',\omega_2'\in\Gamma$, il existe $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ tels que l'on ait $\omega_1'=a\omega_1+b\omega_2$ et $\omega_2'=c\omega_1+d\omega_2$ qu'on peut écrire sous forme matricielle $\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ où A est la matrice $\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}$. De même, il existe une matrice à coefficients entiers $A'=\begin{pmatrix}a'&b'\\ c'&d'\end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}$. Ceci donne : $\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}=A'A\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$. La matrice $A'A$ fixe la base (ω_1,ω_2) ; c'est donc la matrice identité $\begin{pmatrix}1&0\\ 0&1\end{pmatrix}$. Par suite $\det A\cdot\det A'=1$. Comme ces déterminants sont des entiers, on a $\det A=1$ ou $\det A=-1$ *i.e.* la matrice A est un élément de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$. □

Le groupe (multiplicatif) $\mathbb{C}^*$ agit sur l'ensemble $\mathfrak{R}$ des réseaux de $\mathbb{C}$: à $(\alpha,\Gamma)\in\mathbb{C}^*\times\mathfrak{R}$ où Γ est engendré par (ω_1,ω_2), on associe le réseau $\alpha\Gamma$ engendré par $(\alpha\omega_1,\alpha\omega_2)$. Chaque orbite de cette action contient le réseau donné par la base $(1,\tau)$ où $\tau=\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Quitte à appliquer à ce dernier la matrice $\begin{pmatrix}1&0\\ 0&-1\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$, on peut toujours se ramener au cas où $\Im(\tau)>0$, c'est-à-dire τ est un élément du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$. Les couples $(1,\tau)$ de ce type permettent, comme on le verra, de mieux décrire l'équivalence entre courbes elliptiques du point de vue complexe.

2. Le tore différentiable

2.1. Construction géométrique

Commençons d'abord par introduire la nature topologique (et aussi différentiable) de l'objet. Nous verrons ensuite comment ça se passe du point de vue complexe.

Soit Γ_ω le réseau engendré par une base $\omega=(\omega_1,\omega_2)$. On fait agir Γ_ω sur $\mathbb{C}$ de la façon suivante : à $m_1\omega_1+m_2\omega_2$ dans Γ_ω et $z\in\mathbb{C}$ on associe le complexe $z+m_1\omega_1+m_2\omega_2$. Cette action est différentiable, libre et propre. Le quotient $\mathbb{C}/\Gamma_\omega$ est donc une surface différentiable. Regardons comment elle se fabrique géométriquement.

L'orbite de 0 est le sous-groupe Γ_ω de $\mathbb{C}$; il y définit un *grillage* $\mathcal{G}$: l'ensemble des droites parallèles aux vecteurs ω_1 et ω_2 et passant par les points de Γ_ω (voir dessin ci-dessous).

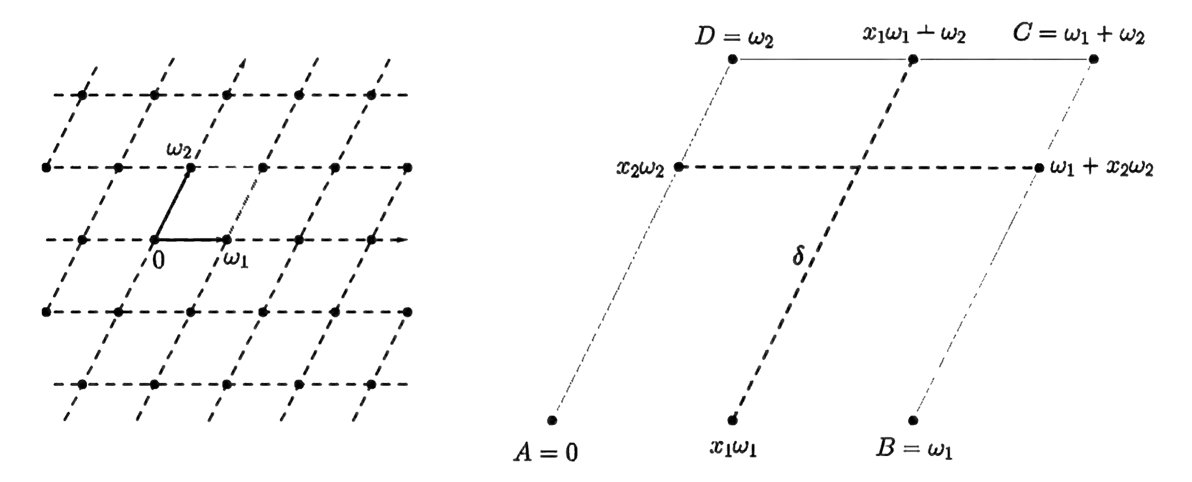
Notons $\mathcal{C}$ le parallélogramme $ABCD$ où $A = 0$, $B = \omega_1$, $C = \omega_1 + \omega_2$ et $D = \omega_2$ et soit $w = y_1\omega_1 + y_2\omega_2$ un point de $\mathbb{C}$ (vu comme espace vectoriel réel).

• Si $w \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{G}$, il est équivalent à un unique point de l'intérieur de $\mathcal{C}$.

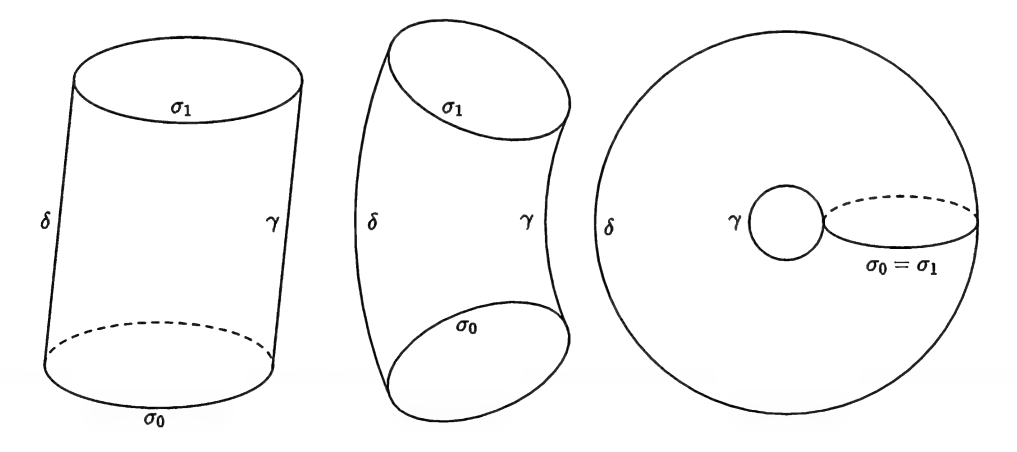
• Si $w \in \Gamma_\omega$, il est équivalent aux quatre sommets A, B, C et D du carré $\mathcal{C}$.

• Si $w \in \mathcal{G}\backslash\Gamma_\omega$, il est équivalent aux deux points $x_1\omega_1$ et $x_1\omega_1 + \omega_2$ ou aux deux points $x_2\omega_2$ et $\omega_1 + x_2\omega_2$ (qu'on voit sur le desin de droite) où $x_1 = y_1 - E(y_1)$ et $x_2 = y_2 - E(y_2)$ (ici $E(z)$ désigne le plus grand entier relatif inférieur ou égal au réel z).

Dans tous les cas considérés, le carré $\mathcal{C}$ contient au moins un élément de chaque classe d'équivalence. C'est un *domaine fondamental* pour la relation $\mathcal{R}$ associée à l'action. Il va permettre d'obtenir l'espace quotient $\mathbb{C}/\mathcal{R}$.



Il s'agit d'identifier les points équivalents. Il suffit donc de le faire sur $\mathcal{C}$ puisque toute classe d'équivalence y a un représentant. Sur le carré grisé, on colle le vecteur $\overrightarrow{AD}$ sur le vecteur $\overrightarrow{BC}$; on obtient un cylindre dans lequel ces deux vecteurs donnent le segment γ (voir dessin ci-dessous). Les segments AB et DC deviennent respectivement les cercles σ_0 et σ_1. Ensuite, on tord le cylindre en poussant le haut et le bas (vers la droite par exemple) jusqu'à superposer le cercle σ_0 sur le cercle σ_1. La surface fermée ainsi obtenue (penser à une chambre à air gonflée) s'appelle *tore* et se note $\mathbb{T}^2_\omega$.



A priori la structure différentiable sur $\mathbb{T}^2_\omega$ dépend de la base $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. En fait, il n'en est rien comme le précise la :

2.2. Proposition. *Soient Γ_ω et $\Gamma_{\omega'}$ deux réseaux de $\mathbb{C}$ définis respectivement par les bases $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ et $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2)$. Alors il existe un difféomorphisme f envoyant $\mathbb{T}^2_\omega$ sur $\mathbb{T}^2_{\omega'}$.*

Démonstration. Elle est immédiate. Il existe un automorphisme linéaire réel $\widetilde{f}$ de $\mathbb{C}$ tel que $\widetilde{f}(\omega_1) = \omega'_1$ et $\widetilde{f}(\omega_2) = \omega'_2$. Cet automorphisme induit un ismorphisme du réseau Γ_ω sur le réseau $\Gamma_{\omega'}$ et donne donc un difféomorphisme $f : \mathbb{C}/\Gamma_\omega = \mathbb{T}^2_\omega \longrightarrow \mathbb{T}^2_{\omega'} = \mathbb{C}/\Gamma_{\omega'}$. □

3. Courbes elliptiques

Nous avons vu que, pour tout réseau Γ_ω de $\mathbb{C}$, le quotient $\mathbb{T}^2_\omega = \mathbb{C}/\Gamma_\omega$ est une surface compacte dont la structure différentiable ne dépend pas de la base $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. C'est la raison pour laquelle, vue sous cet angle, on la note communément $\mathbb{T}^2$ en la considérant comme le quotient de $\mathbb{C}$ par le réseau standard $\{m_1 + im_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}^2$. Il n'en sera rien de tout cela lorsqu'on regardera le quotient $\mathbb{T}^2_\omega$ sous l'aspect complexe.

3.1. La courbe elliptique $\mathbb{T}^2_\omega$

L'action de Γ_ω sur $\mathbb{C}$ que nous avons définie dans la sous-section 2.1 est en fait par biholomorphismes. Comme elle est en plus libre et propre, la surface quotient $\mathbb{T}^2_\omega$ est une courbe complexe (proposition 6.4 du chapitre VII). C'est ce qu'on appelle la *courbe elliptique* associée au réseau Γ_ω.

Soient maintenant $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\omega' = (\alpha\omega_1, \alpha\omega_2)$. Alors les deux courbes elliptiques $\mathbb{T}^2_\omega$ et $\mathbb{T}^2_{\omega'}$ sont (biholomorphiquement) équivalentes. En effet, l'application $z \in \mathbb{C} \longmapsto \alpha z \in \mathbb{C}$ est un biholomorphisme qui envoie le réseau Γ_ω sur le réseau $\Gamma_{\omega'}$; il induit alors un biholomorphisme de $\mathbb{T}^2_\omega$ sur $\mathbb{T}^2_{\omega'}$. On se contentera donc de travailler avec les réseaux du type Γ_τ où $\tau = (1, \tau)$ avec $\tau \in \mathbb{H}$.

3.2. Proposition. *Soient $\mathbb{T}^2_\tau$ et $\mathbb{T}^2_{\tau'}$ deux courbes elliptiques associées respectivement aux réseaux Γ_τ et $\Gamma_{\tau'}$ avec $\tau = (1, \tau)$ et $\tau' = (1, \tau')$. Alors $\mathbb{T}^2_\tau$ et $\mathbb{T}^2_{\tau'}$ sont équivalentes si, et seulement si, il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ telle que $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$.*

Démonstration. L'égalité $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ est équivalente à $\frac{\tau'}{a\tau+b} = \frac{1}{c\tau+d} = \alpha$ où α est un nombre complexe non nul. On a alors $1 = \alpha(c\tau + d)$ et $\tau' = \alpha(a\tau + b)$, ce qu'on peut écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha\tau \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ est encore une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, ceci dit que $(\alpha, \alpha\tau)$ est aussi une base du réseau $\Gamma_{\tau'}$; donc les courbes elliptiques $\mathbb{T}^2_{\tau'}$ et celle associée à la base $(\alpha, \alpha\tau)$ sont équivalentes. Mais la dernière est équivalente à $\mathbb{T}^2_\tau$. Par suite $\mathbb{T}^2_\tau$ est équivalente à $\mathbb{T}^2_{\tau'}$.

Inversement, supposons $\mathbb{T}^2_\tau$ et $\mathbb{T}^2_{\tau'}$ équivalentes, *i.e.* il existe un biholomorphisme $\Phi : \mathbb{T}^2_\tau \longrightarrow \mathbb{T}^2_{\tau'}$. Celui-ci se relève en un automorphisme $\widetilde{\Phi}(z) = \alpha z + \beta$ de $\mathbb{C}$. Le couple $(\alpha, \alpha\tau)$ est alors une base de $\Gamma_{\tau'}$; on doit donc avoir $1 = a_0\alpha + b_0\alpha\tau$ et $\tau' = c_0\alpha + d_0\alpha\tau$ avec $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Par suite :

$$\tau' = \frac{\tau'}{1} = \frac{\alpha(c_0 + d_0\tau)}{\alpha(a_0 + b_0\tau)} = \frac{d_0\tau + c_0}{b_0\tau + a_0} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

où on a posé $a = d_0$, $b = c_0$, $c = b_0$ et $d = a_0$.

Comme la partie imaginaire de $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ est $(ad-bc)\frac{\Im(\tau)}{|c\tau+d|^2}$ et que celles de τ et τ' sont positives, on a $ad-bc>0$ c'est-à-dire $ad-bc=1$, ce qui implique que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est en fait dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. □

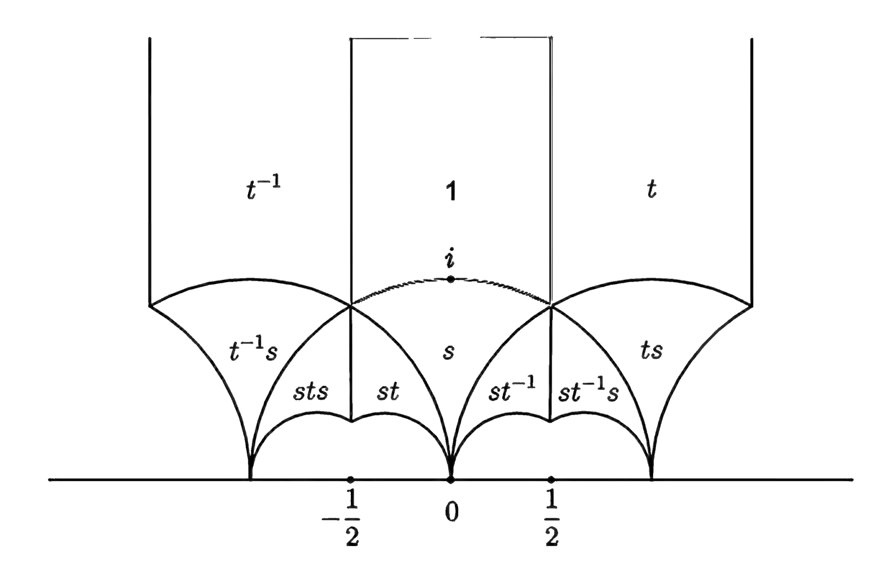
Rappelons (voir chapitre *Homographie* de la partie *Variable complexe*) qu'à toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, on associe l'homographie du plan complexe $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit donc sur $\mathbb{H}$; il y induit alors une action de son sous-groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Soient $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ les deux éléments de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ définissant les homogrpahies de $\mathbb{H}$: $s(t) = -\frac{1}{z}$ et $t(z) = z+1$. Ils vérifient $s^2 = 1$ (identité) et $(st)^3 = 1$. Il est démontré (par exemple dans [Se]) que :

- Les éléments s et t engendrent le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ (dit *modulaire*), quotient de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ par le sous-groupe $\{I,-I\}$ où I est la matrice identité. En fait, s engendre un groupe G_1 isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et st engendre un groupe G_2 isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est le produit libre $G_1 * G_2$.
- $\Delta = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1 \text{ et } -\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2}\}$ (partie grisée sur le dessin ci-dessous) est un domaine fondamental de l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$.

La proposition 3.2 dit que les classes d'équivalence de courbes elliptiques correspondent précisément aux orbites de l'action du groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ sur le demi-plan $\mathbb{H}$ donc aux points du quotient $\mathcal{O} = \mathbb{H}/\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ qu'on appelle *orbifold modulaire*. Celle-ci est obtenue à partir du domaine fondamental Δ ci-dessous.

Tous ces éléments sont abondamment utilisés en arithmétique et en théorie des *formes modulaires* (voir [Se] à cet effet).



4. Fonctions elliptiques

Les fonctions elliptiques sont importantes pour l'étude d'une courbe elliptique $\mathbb{T}_\tau$. L'une d'entre elles joue un rôle fondamental : elle permet de plonger $\mathbb{T}_\tau$ comme courbe lisse

dans le plan projectif complexe $P^2(\mathbb{C})$ en la définissant dans celui-ci par une équation polynomiale explicite. C'est essentiellement ce dernier point qui motive le fait d'en parler (même sommairement) dans ce qui va suivre.

4.1. Soit $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ un réseau de $\mathbb{C}$ où $\tau = (1, \tau)$ avec $\tau \in \mathbb{H}$. On note $\mathbb{T}_\tau$ la courbe elliptique $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$ et π la projection canonique $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}_\tau$. L'action par translations de Γ_τ sur $\mathbb{C}$: $(\gamma, z) = (m + n\tau, z) \in \Gamma_\tau \times \mathbb{C} \longmapsto z + \gamma = z + m + n\tau \in \mathbb{C}$ induit une action sur toute fonction $\widetilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\widetilde{f}(z + \gamma) = \widetilde{f}(z + m + n\tau)$. On dira que $\widetilde{f}$ est Γ_τ-*invariante* ou Γ_τ-*périodique* si elle vérifie :

$$\widetilde{f}(z + \gamma) = \widetilde{f}(z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ et tout } \gamma \in \Gamma_\tau.$$

Toute fonction Γ_τ-*invariante* $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{C}$ induit donc une fonction f sur $\mathbb{T}_\tau$. Inversement, toute fonction f sur $\mathbb{T}_\tau$ définit une unique fonction $\widetilde{f} = f \circ \pi$ sur $\mathbb{C}$ invariante par l'action de Γ_τ. On a donc une identification naturelle entre l'espace des fonctions sur la courbe elliptique $\mathbb{T}_\tau$ et celui des fonctions Γ_τ-invariantes sur $\mathbb{C}$. De façon évidente, on a les assertions suivantes :

i) La fonction f est de classe C^k (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) si, et seulement si, $\widetilde{f}$ l'est.

ii) Comme la projection $\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}_\tau$ est holomorphe, f est holomorphe si, et seulement si, $\widetilde{f}$ l'est. Dans ce cas, $\widetilde{f}$ est bornée et par suite constante par le théorème de Liouville. La situation n'a alors pas beaucoup d'intérêt. Ce qui nous amène à demander un peu moins :

4.2. Définition. *On appelle* **fonction elliptique** *sur* $\mathbb{C}$ *relativement au réseau* Γ_τ *toute fonction méromorphe* Γ_τ*-invariante ou, de façon équivalente, tout simplement une fonction méromorphe sur la courbe elliptique* $\mathbb{T}_\tau$.

De telles fonctions existent bien sûr. Une manière de les construire consiste à utiliser des « moyennes » à l'aide de séries dont les termes sont indexés par les éléments du réseau. Par exemple en considérant, pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \Gamma_\tau$, la quantité formelle :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma_\tau \backslash \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right).$$

On démontre (voir [Ca1] page 156 ou [Vo] page 208) que la famille $\{w_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma_\tau \backslash \{0\}}$, avec $w_\gamma = \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}$, est uniformément sommable sur tout compact K de l'ouvert $\mathbb{C} \backslash \Gamma_\tau$. Cela signifie qu'il existe une fonction $S : K \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_0 \subset \Gamma_\tau \backslash \{0\}$ qui satisfait à la condition : pour toute partie finie $J \subset \Gamma_\tau \backslash \{0\}$ vérifiant $J_0 \subset J$ on a :

$$\sup_{z \in K} \left| S(z) - \sum_{\gamma \in J} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right| < \varepsilon.$$

Si on écrit chaque $\gamma \in \Gamma_\tau \backslash \{0\}$ sous la forme $\gamma = m + \tau n$ avec $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{(0,0)\}$, cela implique que la série double $\displaystyle\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \left(\frac{1}{(z - m - \tau n)^2} - \frac{1}{(m + \tau n)^2} \right)$ est uniformément et absolument convergente sur K. Par suite la quantité $\wp(z)$ définit bien une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \Gamma_\tau$. Donc $\wp$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant comme pôles les éléments du réseau Γ_τ ; tous ces pôles sont doubles. On peut aussi voir facilement que $\wp$ est une fonction paire *i.e.* elle vérifie $\wp(-z) = \wp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_\tau$.

La série $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma_\tau \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$ étant uniformément convergente sur tout compact, on peut la dériver terme à terme. On obtient $\wp'(z) = -\sum_{\gamma \in \Gamma_\tau} \frac{2}{(z-\gamma)^3}$, expression qui montre que la fonction $\wp'$ est Γ_τ-invariante, *i.e* elle vérifie $\wp'(z+\gamma) = \wp'(z)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_\tau$. On en déduit que la fonction $z \longmapsto \wp(z+\gamma) - \wp(z)$ est constante. Ce sera en particulier le cas si on prend $\gamma = 1$ ou $\gamma = \tau$. Mais pour $z = -\frac{1}{2}$, on a $\wp(-\frac{1}{2}+1) - \wp(-\frac{1}{2}) = \wp(\frac{1}{2}) - \wp(\frac{1}{2}) = 0$ (on a utilisé la parité de $\wp$) ; la constante $\wp(z+1) - \wp(z)$ est donc nulle. En prenant cette fois-ci $z = -\frac{\tau}{2}$, on montre que la constante $\wp(z+\tau) - \wp(z)$ est nulle. Comme 1 et τ engendrent Γ_τ, on en déduit que, pour tout $\gamma \in \Gamma_\tau$, $\wp(z+\gamma) - \wp(z) = 0$ *i.e.* la fonction $\wp$ est Γ_τ-invariante. C'est donc une fonction elliptique relativement au réseau Γ_τ, et par suite une fonction elliptique sur $\mathbb{T}_\tau$. Sur cette courbe, $\wp$ a un seul pôle au point $\widehat{0}$ (image du réseau Γ_τ par la projection canonique $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}_\tau$).

4.3. Définition. *La fonction $\wp$ est appelée* **fonction de Weierstrass** *du réseau Γ_τ ou de la courbe elliptique $\mathbb{T}_\tau$.*

Nous allons dire un mot de l'un des rôles fondamentaux de la fonction $\wp$: elle permet de réaliser une courbe elliptique comme courbe algébrique dans un espace projectif. On ne démontrera presque rien, on renvoie le lecteur aux références [BD], [Ca1], [JS], [Ko] et [Vo] pour des exposés justifiés et plus étendus.

Dans la sous-section 6.2 du chapitre VII nous avons vu comme exemple de courbe complexe M dans $\mathbb{C}^2$ celui d'une courbe de niveau d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dont la différentielle complexe $\partial_z f$ est non nulle en tout point $z \in M$. Sa particularité est que M est l'ensemble des points de $\mathbb{C}^2$ dont les coordonnées (z_1, z_2) vérifient une relation concrète, algébrique ou autre. On dira alors que M est *plongée* dans $\mathbb{C}^2$. Malheureusement, comme nous l'avons fait remarquer dans cette même sous-section, il n'est pas possible de faire cela pour une courbe complexe compacte et donc non plus pour une courbe elliptique.

(On dit que $f : M \longrightarrow \mathbb{C}^d$ (avec $d \geq 2$) est un *plongement holomorphe* si f est une application holomorphe, injective, à image fermée et si, pour tout point $z \in M$, la différentielle complexe $\partial_z f : T_z^{10} M \simeq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^d$ est injective.)

Mais on peut plonger une courbe elliptique dans le plan projectif $P^2(\mathbb{C})$. C'est ce qu'on va faire en se contentant d'expliquer les grandes étapes.

On définit le plan projectif complexe $P^2(\mathbb{C})$ exactement comme on l'a fait pour le plan projectif réel $P^2(\mathbb{R})$ (*cf.* page 122). C'est l'ensemble des classes pour la relation d'équivalence sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$: $w \sim w'$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que l'on ait $w' = \lambda w$. On notera $p : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow P^2(\mathbb{C})$ la projection canonique. Les coordonnées homogènes d'un point de $P^2(\mathbb{C})$ seront notées $[w_1, w_2, w_3]$ (avec $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$) ; elles sont définies à un facteur multiplicatif non nul près.

Comme pour le cas réel, pour k variant dans $\{1, 2, 3\}$, les ensembles $U_k = p(\widetilde{U}_k)$ avec $\widetilde{U}_k = \{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 : z_k \neq 0\}$ forment un recouvrement ouvert de $P^2(\mathbb{C})$ et les applications $\varphi_k : \mathbb{C}^2 \longrightarrow U_k$ définies ci-dessous sont des cartes locales :

$$\begin{cases} \varphi_1(u, v) = [1, u, v] \\ \varphi_2(u, v) = [u, 1, v] \\ \varphi_3(u, v) = [u, v, 1]. \end{cases}$$

Reprenons maintenant la fontion $\wp$. On peut montrer (par un calcul fastidieux et un peu long) qu'elle vérifie l'équation différentielle :

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + a\wp(z) + b = 0$$

où a et b sont les constantes complexes données (en fonction des éléments γ du réseau Γ_τ) par les séries :

$$a = 60 \sum_{\gamma \in \Gamma_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^4} \quad \text{et} \quad b = 140 \sum_{\gamma \in \Gamma_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^6}.$$

Soit $Q : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction polynôme (homogène de degré 3) définie par :

$$Q(w_1, w_2, w_3) = w_1 w_2^2 - 4w_3^3 + a w_1^2 w_3 + b w_1^3.$$

L'ensemble $\{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} : Q(w_1, w_2, w_3) = 0\}$ est une partie fermée non vide de $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Elle est invariante par multiplication par une constante complexe non nulle et définit une partie fermée $\mathcal{C}$ dans $P^2(\mathbb{C})$.

(Sur le plan affine $H = \{w_1 = 1\}$ de $\mathbb{C}^3$, la trace de $\mathcal{C}$ est donnée par la formule $y^2 = 4x^3 - ax - b$ où $x = w_3$ et $y = w_2$, une relation qu'on utilise aussi pour étudier une courbe elliptique : c'est la *forme de Weierstrass* de l'équation de la courbe.)

La différentielle (au sens complexe) $\partial_w Q$ de la fonction Q en un point $w = (w_1, w_2, w_3)$ est donnée par les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial w_1}(w) = w_2^2 + 2a w_1 w_3 + 3b w_1^2 \\ \frac{\partial Q}{\partial w_2}(w) = 2 w_1 w_2 \\ \frac{\partial Q}{\partial w_3}(w) = a w_1^2 - 12 w_3^2. \end{cases}$$

On voit alors clairement qu'en chaque point $w = (w_1, w_2, w_3) \neq (0,0,0)$, l'application linéaire $\partial_w Q : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ est de rans 1, et par suite surjective ; donc Q est de rang maximum. En fait, comme la quantité $a^3 - 27b^2$ est non nulle, $\mathcal{C}$ est une courbe algébrique lisse dans $P^2(\mathbb{C})$.

La fonction $\wp$ et sa dérivée $\wp'$ sont holomorphes sauf au point $\widehat{0}$ (image de Γ_τ par la projection canonique $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{T}_\tau$) en lequel elles admettent un pôle double pour la première et d'ordre 3 pour la seconde. On a alors le :

4.4. Théorème. *L'application Ψ de $\mathbb{T}_\tau$ dans le plan projectif $P^2(\mathbb{C})$ définie par :*

$$\Psi(z) = \begin{cases} [1, \wp'(z), \wp(z)] & si\ z \neq \widehat{0} \\ [0,1,0] & si\ z = \widehat{0} \end{cases}$$

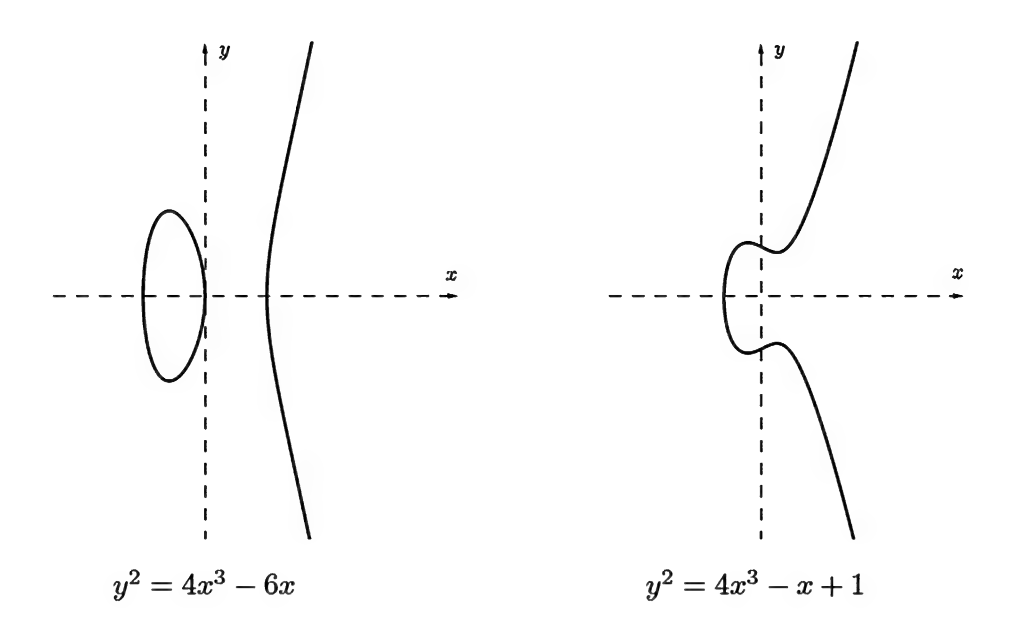
réalise un bihomorphisme de la courbe elliptique $\mathbb{T}_\tau$ sur la courbe algébrique lisse $\mathcal{C}$.

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [BD] page 239 ; et une autre, ébauchée un peu différemment, dans le livre [Ko] page 47.

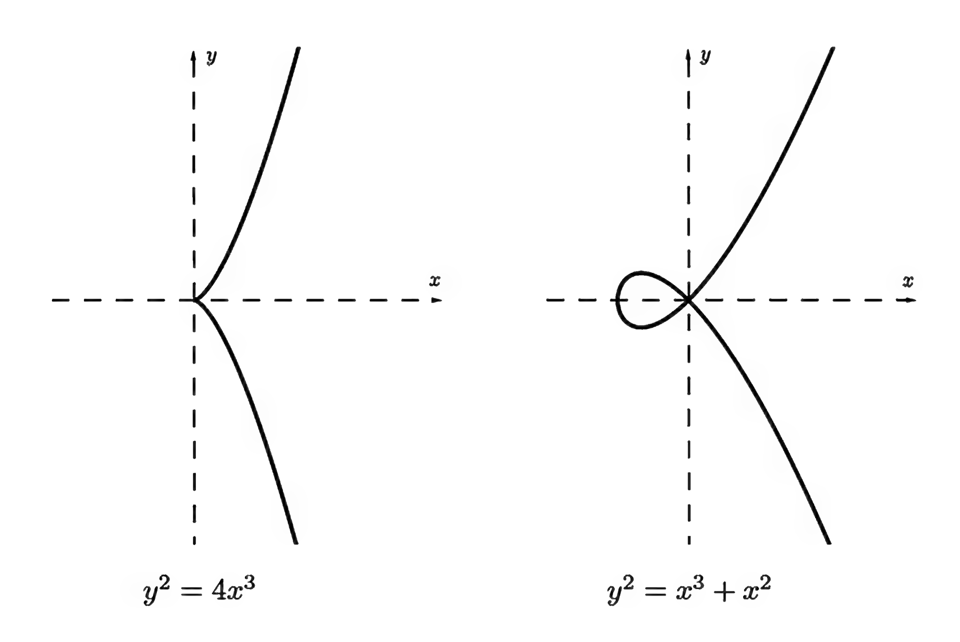
4.5. Cas réel. L'équation dans $\mathbb{R}^2$ d'une *courbe elliptique réelle* a la forme de Weierstrass qu'on a évoquée ci-dessus, c'est-à-dire $y^2 = 4x^3 - ax - b$ où a et b sont des réels tels que $a^3 - 27b^2 \neq 0$. Cette dernière condition dit que la courbe n'a aucun point singulier (un bon exercice de calcul différentiel).

Voici (dessins ci-dessous) quatre exemples de courbes dans le plan euclidien dont deux sont des courbes elliptiques et les deux autres ne le sont pas.

Deux courbes elliptiques dans le plan $\mathbb{R}^2$.



Deux courbes dans le plan $\mathbb{R}^2$ mais qui ne sont pas des courbes elliptiques. La première a son équation sous la forme de Weierstrass mais elle est singulière au point $(0,0)$; la deuxième est aussi singulière au même point (et son équation n'a pas la forme de Weierstrass).



RÉFÉRENCES

La théorie des fonctions d'une variable complexe et celle des surfaces riemanniennes sont plus étendues que le simple aperçu exposé dans notre texte. Le lecteur désirant approfondir ses connaissances sur ces thèmes peut le faire dans les ouvrages référencés ci-dessous.

[Ah] AHLFORS, L.V. *Complex Analysis.* Math. Series, McGraw-Hill (1979).

[Ar] ARMSTRONG, M.A. *Groups and Symmetry.* Under. Texts in Math., Springer (1988).

[Be] BEARDON, A.F. *The Geometry of Discrete Groups.* GTM 91, Springer-Verlag, (1983).

[BP] BENEDETTI, R. & PETRONIO, C. *Lectures on Hyperbolic Geometry.* Universitext, Springer-Verlag, (1992).

[BD] BONAVERO, L. & DEMAILLY, J.-P. *Fonctions holomorphes et surfaces de Riemann.* Notes de cours donnés à l'NS de Lyon en 2003-2005.

[Cm] DO CARMO, M. *Geometria riemanniana.* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, (1988).

[Ca1] CARTAN, H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Enseignement des Sciences, Hermann (1985).

[Ca2] CARTAN, H. *Cours de calcul différentiel.* Méthodes, Hermann, (1977).

[Fo] FORSTER, O. *Lectures on Riemann Surfaces.* GTM 81, Springer (1981).

[Fr] FREITAG, E. *Hilbert Modular Forms.* Springer-Verlag, (1990).

[Go] GODBILLON, C. *Eléments de Topologie algébrique.* Méthodes, Hermann, (1971).

[Ha] HATCHER, A. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, (2002).

[Hö] HÖRMANDER, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* D. Van Nostrand Compagny, Inc., (1966).

[JS] JONES, G.A. & SINGERMAN, D. *Complex Functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambdrige University Press, (1987).

[Ko] KODAIRA, K. *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures.* Grund. der math. Wissenschaften 283, Springer-Verlag (1986).

[Kr] KRANTZ, S.G. *Geometric Function Theory.* Cornerstones, Birkhäuser (2006).

[LC] LAVRENTIEV, M. & CHABAT, B. *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe.* Éditions Mir, Moscou (1972).

[Ra] RATCLIFFE, J.G. *Foundations of Hyperbolic Geometry.* GTM 149, Springer-Verlag.

[Se] SERRE, J.-P. *Cours d'arithmétique.* Collection Sup, PUF (1970).

[ST] SÁ EARP, R. & TOUBIANA, E. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.* Bibliothèque des Sciences, Diderot Éditeur (1997).

[SG] SAINT-GERVAIS, H.P. *Uniformisation des surfaces de Riemann.* ENS Éditions, Lyon.

[Ve] VERJOVSKY, A. *Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas.* Instituto Politéchnico Nacional, Mexico (1986).

[Vo] VOGEL, P. *Fonctions analytiques.* Collection *Licence*, Dunod (1999).

INDEX ALPHABÉTIQUE

Variable complexe et surfaces riemanniennes

Cours et exercices résolus

Cet ouvrage est issu de cours dispensés en Licence 3 et en Master, et d'un ensemble de compléments sur diverses notions qui leur sont reliées.

La première partie est une introduction à la théorie des fonctions d'une variable complexe, sous l'aspect analytique habituel, avec souvent une touche géométrique. La deuxième est consacrée à une étude élémentaire des surfaces, à la notion de métrique et à ce qui s'y rattache, en particulier la longueur d'une courbe, les géodésiques et, bien entendu, la courbure qui est un invariant fondamental en géométrie riemannienne. Un regard particulier est porté sur les surfaces hyperboliques.

Les compléments sont assez courts. Ils accompagnent ces parties pour éclairer leurs contenus. On y trouve deux démonstrations différentes du théorème fondamental de l'algèbre, quelques exemples modèles d'ouverts du plan complexe, le groupe fondamental et les revêtements, des éléments utiles de la théorie des groupes et, rapidement, les courbes elliptiques et leur plongement dans le plan projectif complexe par la fonction de Weierstrass.

Et enfin, une bibliographie bien fournie pour ceux qui veulent avoir plus de détails et approfondir l'étude des thèmes évoqués.

Aziz El Kacimi Alaoui est professeur émérite à l'Université Polytechnique Hauts-de-France. Ses travaux portent sur les systèmes dynamiques et la théorie des feuilletages sous des aspects analytiques et cohomologiques. Il dispensait ses enseignements dans les formations classiques et la préparation aux concours d'accès à la fonction d'enseignant (CAPES et Professorat des Écoles). Parallèlement à ses activités d'enseignant-chercheur, il s'est beaucoup investi dans la vulgarisation des mathématiques pour le grand public et dans la formation pédagogique auprès des enseignants du secondaire et de leurs élèves.

www.editions-ellipses.fr



